تأکید بر راه‌حلهای چندگانه: کلیدی برای تقویت مهارت تعمیم در تفکر ریاضی‌وار

زهرا رحیمی *

دکتر ابراهیم طلایی **

دکتر ابراهیم ریحانی ***

دکتر هاشم فردانش ****

چکیده

هدف پژوهش حاضر، بررسی میزان اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حلهای چندگانه، در تقویت مهارت تعمیم -به عنوان یکی از وجوه بارز تفکر ریاضی‌وار- در دانش‌آموزان دوره متوسطهٔ دوم است. شرکت‌کنندگان این مطالعه از میان دانش آموزان دو رشته ریاضی و تجربی انتخاب شدند تا امکان بررسی تأثیرات این روش روی دانش‌آموزان با مهارت بالاتر و پایین‌تر در درس ریاضی فراهم شود. این افراد متشکل از ۴۷ دانش‌آموز (۲۰ نفر از رشته ریاضی، ۲۷ نفر از رشته تجربی) در گروه مداخله و ۵۴ دانش‌آموز (۲۰ نفر از رشته ریاضی و ۳۴ نفر از رشته تجربی) در گروه کنترل هستند که همگی در سال تحصیلی ۹۵-۱۳۹۴، در دبیرستانهای دولتی دخترانهٔ منطقهٔ ۳ آموزش و پرورش شهر تهران و در پایه دوم متوسطهٔ دوم مشغول به تحصیل بودند. ابزار این مطالعه، دو آزمون (در قالب پیش‌آزمون و پس‌آزمون) است که همهٔ سؤالات آن از مقالات معتبر اتخاذ شده است و بر مبنای دسته‌بندی جردک و ال‌موهیر (۲۰۱۴) به سنجش سه خرده مهارت تعمیم فوری، تعمیم نزدیک و تعمیم دور می‌پردازد. روش پژوهش در این مطالعه، کنش‌پژوهی است، اما در بطن آن از روش شبه آزمایشی نیز استفاده شده است. نتایج تحلیلها حاکی است که استفاده از آموزش به کمک راه‌حلهای چندگانه، مهارت تعمیم را در هر دو گروه تجربی و ریاضی افزایش می‌دهد و در تمام خرده‌مهارتها، دو گروه به یک میزان عملکردی بهتر خود نشان دادند. تحلیل کیفی پاسخهای ارائه شده از سوی دانش‌آموزان نیز، نتایجی دیگر به دست می‌دهد که در محورهای عدم آشنایی کامل دانش‌آموزان با مفهوم متغیر، شکاف میان تفکر حسابی و تفکر جبری و ضعف در بیان تعمیم و گفتمان ریاضی قابل اختصار است.

کلید واژگان: راه‌حلهای چندگانه، تعمیم، تفکر ریاضی‌وار

تاریخ دریافت: ۹۵/۱/۳۰ تاریخ پذیرش: ۹۵/۹/۳

* دانشجوی دکتری برنامه درسی، دانشگاه تربیت مدرس، رسالهٔ دکتری طراحی الگوی تدریس برای تحقق تفکر ریاضی‌وار در دانش‌آموزان متوسطه دوم mehrshid80@yahoo.com

** استادیار گروه علوم تربیتی دانشکده علوم انسانی دانشگاه تربیت مدرس (نویسنده مسئول) e.talae@modares.ac.ir

*** دانشیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی e_reyhani@yahoo.com

**** دانشیار گروه تعلیم و تربیت، دانشگاه تربیت مدرس hfardanesh@yahoo.com

مقدمه

دایرۀ گستردۀ معرفت بشری چنان انگاشته شده که لحظه‌به‌لحظه وسعت می‌یابد و به‌نظر می‌رسد ریاضیات در حرکت پرگاری که به این رشد و فزونی عینیت می‌بخشد، نقشی عمده دارد (باقری، ۱۳۹۰). دانشی که همواره در برنامه درسی همۀ کشورها شأنیتی ویژه داشته و بسیاری، آن‌را رمز موفقیت حرفه‌ای دانش‌آموزان (شورای ملی تحقیقات[1] آمریکا، ۲۰۰۱) و دارای رسالتی عظیم در پرورش تواناییهای افراد و آماده‌سازی آنان برای زیستی هوشمندانه‌تر و خردمندانه‌تر دانسته‌اند. تا بدان‌جا که شورای ملی معلمان ریاضی[2] امریکا، ریاضیات را بخشی از میراث فرهنگی و هوشمندانۀ بشر دانسته و در مجموعۀ مدون خود تحت عنوان اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای[3] (۲۰۰۰)، هدف اساسی از مطالعه و آموزش آن را آماده‌سازی دانش‌آموزان برای زندگی برشمرده‌اند. این شورا توانایی تفکر ریاضی را از تواناییهای لازم برای محیط کار قلمداد می‌کند و مدعی است که کمک به همۀ دانش‌آموزان برای توسعۀ تواناییهای ریاضی، از اهداف آموزش ریاضی است و همۀ دانش‌آموزان می‌توانند یاد بگیرند که به‌صورت ریاضی‌وار بیندیشند (کمیتۀ مطالعۀ یادگیری ریاضی، ۲۰۰۱؛ ترجمه بهزاد و گویا، ۱۳۸۷).

امروزه ریاضیات به مثابۀ زبانی برای اندیشیدن و تفکر (فرودنتال[4]، ۲۰۰۶) مجالی برای ظهوری دیگرگونه یافته است و توقع جامعۀ امروزی از آن، دانشی خاص برای افرادی خاص نیست، بلکه شعار «ریاضیات برای همه» در بسیاری از محافل به گوش می‌رسد و انتظار می‌رود به مدد ریاضیات، عموم دانش‌آموزان چگونه اندیشیدن و بهتر زیستن را بیاموزند. اما علی‌رغم شکل‌گیری چنین انتظاری، جایگاه دانش‌آموزان ایرانی در مطالعات تیمز ۱۹۹۹ تا ۲۰۱۱ و نیز تیمز پیشرفتۀ ۲۰۰۸، در همۀ این سالها و در هر دو پایۀ چهارم و هشتم، به‌طور معناداری پایین‌تر از میانگین مقیاس تیمز گزارش شده است[5] (کریمی، بخشعلی‌زاده و کبیری، ۱۳۹۱). چنین نتایجی، مؤید برخی ناکامیها در تحقق بخشیدن به رسالت اساسی آموزش ریاضی است. بر این اساس پرسش این است که چگونه می‌توان در گردونۀ انتظارات متفاوت از آموزش ریاضی، به مأموریت اساسی پرورش تفکر، نقشی محوری بخشید و مقصد کدام مسیر، مأمن دانش‌آموزانی است که ریاضیات را بیگانه از

1. National Research Council (NRC)
2. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
3. Principles and Standards for School Mathematics
4. Freudenthal

۵. میانگین نمرات ریاضی پایه چهارم در این سالها (به استثنای سال ۱۹۹۹) به ترتیب ۳۸۷، ۳۸۹، ۴۰۲ و ۴۳۱ و در پایۀ هشتم ۴۱۸، ۴۲۲، ۴۱۱، ۴۰۳ و ۴۱۵ بوده است. لذا همان‌طور که دیده می‌شود، به خصوص در مقطع متوسطه، در بهترین حالت، با میانگین بین‌المللیِ ۵۰۰، اختلافی به اندازۀ ۷۸ نمره وجود دارد. ضمن آنکه تعداد روندهای کاهشی، بیش از روندهای افزایشی است.

خود نپندارند، بفهمند و به مدد آن بیندیشند؟ از این رو در این پژوهش، جست‌و جوی رویکردی در نظر است که ریاضیات را با رسالت دیرینه‌اش آشتی دهد و به‌یمن حلاوت این مصالحه، دانش‌آموزانی مسلّح به سلاح تفکر ریاضی‌وار پرورش یابند.

تفکر ریاضی‌وار فرآیندی پویاست که مؤلفه‌های بسیاری را شامل می‌شود، اما بسیاری از آموزشگران، بر اهمیت تعمیم به مثابه مؤلفه‌ای کلیدی و وجهی بارز از تفکر ریاضی‌وار تأکید کرده‌اند (کوپر و وارن[۱]، ۲۰۰۸). تا بدان‌جا که واتسن[۲] (۲۰۰۱)، واتسن، هوزارت[۳] و روف[۴] (۲۰۱۲) و هریس[۵] (۲۰۰۱) تفکر ریاضی‌وار را تقریباً معادل با فرآیند تعمیم برشمرده‌اند. در بیان اهمیت تعمیم و الگویابی همین بس که تعمیم را ضربان قلب ریاضی (میسن[۶]، ۱۹۹۶) و ریاضیات را «علم مطالعهٔ الگوها و ارتباطات» (برنامه‌درسی ملی، ۱۳۹۱: ۳۳) و «دانش و زبان الگوها» (کاپلی[۷]، ۲۰۰۰) قلمداد کرده‌اند. بدین‌ترتیب در این مطالعه، مقصود و محصول تفکر ریاضی‌وار، تربیت دانش‌آموزی است که دارای توانایی بیشتری برای یادگیری موقعیتهای متفاوت ریاضی و دارای نگرش استقرایی برای کشف الگوها و درک مفاهیم ریاضی است و سعی بر آن است که این آرمان، از طریق تغییر رویکرد آموزشی محقق شود. رویکرد منتخب این مطالعه، رویکرد راه‌حلهای چندگانه[۸] است که در اسناد سیاستگذاری آموزشی در حیطهٔ آموزش ریاضی، بسیار مورد تأکید بوده است (NRC، ۲۰۰۱؛ NCTM، ۲۰۰۶؛ مرکز ملی به‌گزینی آموزشی[۹] ، ۲۰۱۰) و به باور بسیاری از صاحب‌نظران و آموزشگران ریاضی، پتانسیلی مناسب و ارزشمند در بهبود تلاشهای یادگیری دانش‌آموزان دارد (استار و جانسن[۱۰]، ۲۰۰۸؛ لینچ[۱۱] و استار، ۲۰۱۴). تأکید این روش، بر استفاده از چند راه‌حل برای حل مسائل است و اساس آن این است که حل مسأله با اتخاذ رویکردی واحد و رسیدن به پاسخ، خاتمه نمی‌یابد، بلکه تلاش می‌شود از زوایای گوناگون به مسأله نگریسته شود و راه‌حلهای متعدد، ارائه و مورد ارزیابی قرار گیرد. این رویکرد هر چند بر تألیف کتابهای درسی ریاضی مدرسه‌ای در

1. Cooper & Warren
2. Watson
3. Houssart
4. Roaf
5. Harries
6. Mason
7. Copley
8. Multiple solutions
9. National Governors Association Center for Best Practices (NGAC)
10. Star & Johnson
11. Lynch

سالهای اخیر مؤثر بوده است، اما تاکنون پژوهشی مشخص اثربخشی آن را در بهبود عملکرد ریاضی دانش‌آموزان نیازموده است.

لذا در مجموع هدف کلی این مطالعه، بررسی میزان موفقیت و اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حلهای چندگانه، در تقویت مهارت تعمیم در دانش‌آموزان دورهٔ متوسطهٔ دوم است. این مقایسه به استناد مطالعاتی که این روش را تنها برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی مناسب می‌دانند (برای نمونه لینچ و استار، ۲۰۱۴؛ لیکین،[1] ۲۰۱۱) در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی به تفکیک صورت پذیرفته است تا امکان بررسی تأثیرات این روش روی دانش‌آموزان با مهارت بالاتر و پایین‌تر در درس ریاضی فراهم شود.

پیشینهٔ نظری و پژوهشی

تفکر ریاضی‌وار مقوله‌ای است که ذهن بسیاری از متخصصان آموزش ریاضی را بیرون از مرزهای کشور به‌خود اختصاص داده و از نظر متخصصان داخلی دور مانده است. هر چند تعاریف و برداشتهای متفاوتی از این مفهوم وجود دارد، اما به رغم وجود تنوع در برداشتها ، این وفاق کلی میان تقریباً همهٔ این تعابیر وجود دارد که مهم‌ترین –یا یکی از مهم‌ترین– اهداف آموزش ریاضی، ایجاد توانایی تفکر و درست اندیشیدن است (پولیا[2]، ۱۹۶۹، ترجمه طالب‌زاده و گویا، ۱۳۸۲).

در رویارویی با این مقوله، سه رویکرد کلی قابل تشخیص است. نخست رویکرد ریاضیدانانی مانند استیسی[3] (۲۰۰۶) که تفکر ریاضی‌وار را اندیشیدن به کمک ریاضی در ارتباط با سایر حوزه‌های علمی مانند علوم، فناوری، اقتصاد و ... می‌بینند و این مهارت را در بستر ارتباط آن با زندگی روزمره، برقراری ارتباط با ایده‌ها و پدیده‌ها و به نوعی مدل‌سازی جستجو می‌کنند. دوم رویکرد گروهی که «حل مسأله»[4] را قلب تپندهٔ ریاضیات برمی‌شمرند. آنها تجزیه و تحلیل، انتزاع و ترکیب پدیده‌ها را از منظر ریاضی، تفکر ریاضی‌وار (شونفلد[5]، ۱۹۹۲) و با اندکی اغماض، معادل با مهارت حل مسأله می‌دانند. آنچه در این پژوهش مد نظر است رویکرد گروه سومی است که هرچند مهارت تفکر ریاضی‌وار را با مهارت کاربرد ریاضی در زندگی روزمره و حل مسأله بیگانه نمی‌دانند، اما رؤیای تربیت دانش‌آموزی را در سر می‌پرورانند که بیش از آنکه مسأله‌حل‌کنِ خوبی

1. Leikin
2. Polya
3. Stacey
4. Problem solving
5. Shoenfeld

باشد، متفکر ریاضی است. به این معنا که دارای توانایی بیشتری برای یادگیری موقعیتهای گوناگون ریاضی و دارای نگرش استقرایی برای کشف الگوها و درک مفاهیم ریاضی است.

اغلب تعاریفی که برای تفکر ریاضی‌وار ارائه شده، آن را مفهومی از جنس فرآیند قلمداد کرده‌اند؛ فرآیندی پویا و غیر ایستا که حداقل شامل یکی از فرآیندهای ذهنی استدلال کردن[۱]، انتزاع[۲]، حدس‌زدن[۳]، بازنمایی و تغییر بازنمایی[۴]، استقرا[۵]، استنتاج[۶]، تجسم‌کردن[۷]، تجزیه و تحلیل‌کردن[۸]، ترکیب‌کردن[۹]، ارتباط دادن[۱۰]، اثبات‌کردن[۱۱]، تخصیص و تعمیم[۱۲]، (کارول[۱۳]، ۱۹۹۳؛ هارل، سلدن و سلدن[۱۴]، ۲۰۰۶؛ به‌نقل از مک‌دوگال و کاراداگ[۱۵]، ۲۰۰۸) و علاوه بر اینها دسته‌بندی‌کردن[۱۶] (تال،[۱۷] ۱۹۹۱)، توجیه‌کردن و متقاعد کردن[۱۸]، خلاصه‌کردن و فکر کردن[۱۹]، بازبینی[۲۰] و پرسشگری[۲۱] (میسن، برتن[۲۲] و استیسی، ۲۰۱۰) و دیگر فرآیندهای ذهنی است.

از این میان بنا به آنچه از متفکر ریاضی در این مطالعه مد نظر است و با توجه به اهمیت تعمیم و فرمول‌بندی فعالیتهای ریاضی در رشد تفکر ریاضی (کوپر و وارن، ۲۰۰۸)، فرآیند تعمیم، سمت و سوی این پژوهش را به خود منعطف ساخته است. تعمیم را ضربان قلب ریاضیات و رگ حیات این علم (میسن و همکاران، ۲۰۱۰) نامیده و بر این باورند که اگر معلمان از وجود و حضور تعمیم آگاه نباشند و به عادت دادن دانش‌آموزان به بیان تعمیمهای خودشان تمایل نداشته نباشند، تفکر ریاضی اتفاق نمی‌افتد (میسن، ۱۹۹۶). تعریف واتسن (۲۰۰۱)، واتسن، هوزارت و روف (۲۰۱۲) و

1. Reasoning
2. Abstracting
3. Conjecturing
4. Representing and switching between different representations
5. Induction
6. Deduction
7. Visualizing
8. Analyzing
9. Synthesizing
10. Connecting
11. Proving
12. Specializing and Generalizing
13. Carroll
14. Harel, Seldon & Seldon
15. McDougall & Karadag
16. Classifying
17. Tall
18. Justifying & Convincing
19. Distilling & Mulling
20. Monitoring
21. Questioning
22. Burton

هریس (۲۰۰۱) نیز از تفکر ریاضی‌وار مبنایی منطقی‌تر برای این انتخاب فراهم می‌کند؛ چرا که این نویسندگان تفکر ریاضی‌وار را با اغماض، معادل مهارت تعمیم می‌دانند.

متفکران حوزهٔ آموزش، بر سر ارائهٔ تعریفی واحد از تعمیم، توافق ندارند، اما کوششهای بسیار برای ارائهٔ توصیفی مناسب از آن صورت داده‌اند. از نظر پولیا (ترجمه احمد آرام، ۱۳۷۷) تعمیم عبارت از گذشتن از ملاحظهٔ یک چیز به ملاحظهٔ دسته‌ای از چیزهاست که آن چیز یکی از آنها به شمار می‌رود، یا گذشتن از ملاحظهٔ دسته‌ای محدود به ملاحظهٔ دسته‌ای فراگیرتر است که آن دسته محدود را نیز شامل می‌شود. رادفورد، باردینی و سابنا[۱](۲۰۰۷، به نقل از ریورا[۲]، ۲۰۱۴) فرآیند تعمیم را تشخیص الگویی مشترک تعریف می‌کنند که در چندین مرحلهٔ خاص رخ می‌دهد و به وضوح در یک مثال خاص از طریق تخصیص محقق می‌شود و راه تعمیم را هموار می‌کند. به تعبیر میسن و همکاران (۲۰۱۰) نیز تعمیم، حرکت از چندین مورد و مصداق به سمت حدسیه‌سازی در دسته‌ای گسترده از موارد است. برای این مفهوم، دسته‌بندیهای گوناگون ارائه شده است (برای نمونه جردک و ال‌موهیر[۳]، ۲۰۱۴؛ کیرن،[۴] ۲۰۱۱؛ میسن، ۲۰۰۵؛ لنین[۵]، ۲۰۰۵؛ رادفورد، ۲۰۰۳، به نقل از ریحانی و صدیقی، ۱۳۹۲؛ بیلز و رولند[۶]، ۱۹۹۹؛ دورفلر[۷]، ۱۹۹۹، به نقل از زازکیس[۸] و همکاران، ۲۰۰۷). از میان دسته‌بندیهای متفاوت، آخرین تقسیم‌بندی که جردک و ال‌موهیر (۲۰۱۴) ارائه داده‌اند، بیشترین همخوانی را با هدف این مطالعه دارد. از نگاه آنان تعمیم شامل سه مرحلهٔ تعمیم فوری[۹]، تعمیم نزدیک[۱۰] و تعمیم دور[۱۱] است. تعمیم فوری شامل مرحلهٔ بلافاصله‌ای از مراحل قبلی است که با رسم شکل یا شمارش، قابل دستیابی است. در تعمیم نزدیک، دستیابی به جواب با رسم یا شمارش مرحله به مرحله ممکن می‌شود و مرحلهٔ سوم یا تعمیم دور زمانی است که از محدودیتهای عملی شمارش یا رسم مرحله به مرحله فراتر می‌رود و بیان رابطهٔ بین حداقل دو متغیر، در حالت کلی مورد نظر است (جردک و ال‌موهیر، ۲۰۱۴).

1. Radford, Bardini & Sabena
2. Rivera
3. Jurdak & El Mouhayar
4. Kieran
5. Lannin
6. Bills & Rowland
7. Dorfler
8. Zazkis
9. Immediate generalization
10. Near generalization
11. Far generalization

همان‌گونه که پیشتر اشاره شد، مسیری که پژوهشگران این پژوهش، آن را منتهی به تقویت تعمیم در دانش‌آموزان می‌دانند، از منزلگاه تدریس با تأکید بر راه‌حلهای چندگانه می‌گذرد. رویکرد راه‌حلهای چندگانه حاوی بایستگی یا نوعی پتانسیل آشکار برای حل مسأله به روشهای متفاوت است و به‌تبعِ استفاده از آن، حل مسأله با اتخاذ رویکردی واحد و دستیابی به پاسخ خاتمه نمی‌یابد؛ بلکه تلاش می‌شود از زوایای گوناگون به مسأله نگریسته شود و راه‌حلهای متعدد، ارائه و مورد ارزیابی قرار گیرد. در نگاه از حوزهٔ موضوعی ریاضی، تفاوت میان این راه‌حلها در سه محور بازنماییهای متفاوت از یک مفهوم ریاضی، ارائهٔ تعاریف و ویژگیهای متفاوت برای یک مفهوم خاص در ریاضی و یا نگرش به یک مقوله از شاخه‌های متفاوت ریاضی، انعکاس خواهد یافت (لیواو واینبرگ[1] و لیکین، ۲۰۰۹، ۲۰۱۲؛ لیکین، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳).

در ایران، پژوهشی مشخص به معرفی این رویکرد اختصاص نیافته است، اما در سالهای اخیر، صاحب‌نظران حیطهٔ آموزش ریاضی در خارج از مرزهای کشور اقبالی ویژه به آن نشان داده و مقالاتی چند دربارهٔ قابلیتهای ویژهٔ آن در تقویت مهارتها و نگرش دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی و حتی معلمان ریاضی به رشتهٔ تحریر درآورده‌اند. یافته‌های این مطالعات، مواجهه‌های متفاوتی را به تصویر می‌کشد. بسیاری از پژوهشگران، استفاده از این رویکرد را برای دستیابی به تسلط بیشتر در دانش ریاضی به رسمیت شناخته و معتقدند که آگاه‌کردن دانش‌آموزان از اینکه هر مسأله می‌تواند از راههای بسیار به نتیجه منجر شود و تشویق کردن آنان به گام گذاشتن در هر یک از این مسیرها، در نهایت کیفیت فهم ریاضی را در آنان افزایش خواهد داد. مدافعان این رویکرد معتقدند که طرح کردن مسائلی با تنها یک جواب درست، می‌تواند دانش‌آموز را از تجربهٔ مسیرهای متفاوت، منصرف و دلسرد کند و او را از کاوش در ایده‌های متنوع باز دارد. آنان این رویکرد را فرصتی ویژه برای به فعل رساندن خلاقیت ریاضی دانش‌آموزان و فهم عمیق‌تر ایشان، از مفاهیم ریاضی برشمرده‌اند و آن را هم ابزاری آموزشی و هم ابزاری پژوهشی دانسته‌اند که توانی ویژه در ارزیابی دانش ریاضی دانش‌آموزان دارد (لیواو واینبرگ و لیکین، ۲۰۱۲). ابزاری آموزشی و پژوهشی که دارای ظرفیتی ویژه است و استفادهٔ هوشمندانه از پتانسیل آن، خواهد توانست پیامدهای مثبت بسیاری را در حوزهٔ مهارتها و نیز نگرشها، هم در دانش آموزان و هم در معلمان به همراه داشته باشد.

1. Levav-Waynberg

اما به موازات همین اقبال و به رغم توصیه‌های بسیاری از متخصصان و آموزشگران حوزهٔ آموزش ریاضی بر استفاده از این روش، برخی پژوهشگران نیز بر این باورند که ارائهٔ مفاهیم ریاضی از چشم اندازهای متفاوت، نه تنها فهم عمیق را تضمین نمی‌کند، بلکه به سبب محدودیتهای زمانی، این رؤیا محقق نخواهد شد و علاوه بر آن ارائهٔ تصاویر چندگانه به چشمی که برای «دیدن»، آموزش ندیده است، به ابهام بیشتر تصویر اولیه دامن خواهد زد (وو[1]، ۱۹۹۶). لذا برخی آموزشگران با استناد به اینکه نتوانسته‌اند چنین رویکردی را در بازهٔ زمانی کوتاهی که در کلاس درس در اختیار دارند، پیاده کنند، آن را سبب سردرگم شدنِ به‌ویژه دانش آموزان ضعیف‌تر می‌دانند و از اجرای آن در کلاسهای درس امتناع می‌ورزند (لیکین، ۲۰۱۱). برخی مخالفان نیز معتقدند که آموزش به دانش‌آموزان ضعیف‌تر تنها در صورتی اثربخش خواهد بود که مجموعه‌ای محدود و ساده از قوانین به آنان آموزش داده شود (لینچ و استار، ۲۰۱۴).

در میان مقالات موجود که به ابعاد مختلف رویکرد راه‌حلهای چندگانه پرداخته‌اند، پژوهش مشخص و مستقلی در زمینهٔ تأثیر استفاده از این رویکرد بر تقویت مهارت تعمیم موجود نیست. اما در برخی مقالات، به شکلی جسته و گریخته، وجود ارتباط میان راه‌حلهای چندگانه و تفکر ریاضی‌وار تأیید و بدان استناد شده است. برای مثال در مطالعه‌ای ادعا شده است که طی استفاده از رویکرد راه‌حلهای چندگانه، مسیر برای ورود بازنماییهای[2] متفاوت هموار می‌شود و غنای هر چه بیشترِ تصویر ذهنی ساخته شده از مفهوم، به موفقیت بیشتر شخص در یادگیری می‌انجامد. به این ترتیب حرکت از یک بازنمایی ریاضی به بازنمایی دیگر و تنوع فعالیتها می‌تواند بستر ذهن دانش‌آموز را برای تفکر ریاضی‌وار مهیا سازد (هنینگسن و استاین[3]، ۱۹۹۷). پوند[4] (۲۰۰۸) از جمله افرادی است که معتقد است تقویت زبان ریاضی و بازنماییهای نمادین، تفکر ریاضی‌وار را شکل می‌دهد و بر آن مؤثر واقع می‌شود. ریورا (۲۰۱۱، به‌نقل از ریحانی و صدیقی، ۱۳۹۲) در تأیید او، صراحتاً تفکر ریاضی‌وار را از طریق حرکت آزادانه میان حالتهای تجسمی، دیداری، نمادین، رسمی، غیر رسمی، تحلیلی، ادراکی و کلامی ممکن می‌بیند. در مطالعه‌ای دیگر صراحتاً مسائل با راه‌حلهای چندگانه، ابزاری برای ارزشیابی از تفکر ریاضی‌وار قلمداد شده و تفکر ریاضی‌وار از نظر توان آن در ایجاد و بسط خلاقیت در ریاضی مورد واکاوی قرار گرفته است (لیواو واینبرگ و لیکین، ۲۰۰۹). به این‌ترتیب از چنین چشم‌اندازی تأثیر مثبت بازنماییهای چندگانه حین کاربرد روش

1. Wu
2. Representation
3. Henningsen and Stein
4. Pound

راه‌حلهای چندگانه بر تفکر ریاضی‌وار تأیید می‌شود و بنایی منطقی برای ادعای محقق این طرح سامان می‌یابد. اما در این مطالعه تمرکز بر اثربخشی روش راه‌حلهای چندگانه بر مؤلفهٔ تعمیم از تفکر ریاضی‌وار مد نظر است.

روش پژوهش

در این مطالعه از آن رو که آزمون اثربخشی یک رویکرد، در بافتی واقعی و طبیعی مد نظر بود، لذا از میان روشهای پژوهشی که می‌توانست پاسخ‌گوی نیازهای عرصهٔ عمل باشد، روش کنش‌پژوهی برگزیده شد. یکی از موارد کاربرد این روش را تغییر در روشهای آموزشی و واردسازی شیوه‌های جدید یا تلفیق آن با شیوه‌های قبلی ذکر کرده و آن را شامل چهار مرحلهٔ برنامه‌ریزی[1]، عمل[2]، مشاهده[3] و بازاندیشی[4] دانسته‌اند (کمیس، مک‌تاگارت و ریتالیک[5]، ۲۰۰۴). گفتنی است که روح حاکم بر کل این مطالعه کنش‌پژوهی است و همهٔ فعالیتهای زمان اجرا تحت لوای این روش به انجام رسیده است. اما در ضمن انجام این روش پژوهشی، به منظور بررسی مهارت تعمیم در دانش‌آموزان و مقایسهٔ آن، پیش و پس از قرار گرفتن در معرض رویکرد آموزشی، از روش شبه آزمایشی و تحلیلهای کمّی نیز استفاده شده است.

مراحل اجرای روش

برای پایبندی به چرخهٔ چهار مرحله‌ای برنامه‌ریزی، عمل، مشاهده و بازاندیشی، در مرحلهٔ برنامه‌ریزی ابتدا دو کلاس ریاضی و تجربی در پایهٔ دوم متوسطه، در یکی از مدارس دولتی تهران انتخاب شدند. به دلیل عدم امکان انتخاب تصادفی اعضای نمونه به اقتضای رعایت بافت طبیعی و واقعی که از ملزومات کنش‌پژوهی است، انتخاب این دو کلاس به شکل هدفمند انجام شد. میانگین نمرات ریاضی سال گذشتهٔ این دانش‌آموزان در درس ریاضی مؤید آن بود که طبق آنچه انتظار می‌رود، دانش‌آموزان رشته ریاضی از دانش‌آموزان تجربی در درس ریاضی قوی‌ترند[6]. پس از انتخاب نمونه، درس ریاضیات ۲ به جهت قابلیت مناسب آن در تدریس به کمک راه‌حلهای چندگانه انتخاب شد و طرح درسهای روزانه برای آموزش به مدت یک ترم تحصیلی بر این اساس تنظیم و به تأیید متخصصان این حوزه رسید. این طرح درسها در واقع پیش‌بینی از آنچه قرار است

1. Plan
2. Act
3. Observe
4. Reflect
5. Kemmis, McTaggart & Retallick

۶. عملکرد ریاضی دانش‌آموزان طی سال تحصیلی نیز، در هر دو ترم نشان‌دهندهٔ برتری گروه ریاضی نسبت به گروه تجربی در این درس است.

بین معلم و دانش‌آموزان در ظرف زمانی هفتادو پنج دقیقه‌ایِ کلاس درس حادث شود، فراهم کرده و به مثابهٔ راهنمای عمل، تعیین‌کنندهٔ خط مشی کلاس درس بود.

در مرحلهٔ عمل و اجرا، به جهت سیال بودن کلاسهای درس و پیچیدگی رفتارهای انسانی، پایبندی به اجرای صد در صدی طرح درسها ممکن به نظر نمی‌رسید، اما تلاش بر این بود که این پایبندی به شکل حداکثری، اتفاق بیفتد و در ظرف زمانی محدود کلاس درس، به انواع راه‌حلهای ارائه شده از سوی دانش‌آموزان بها داده شود و همهٔ آنها مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرد. ضمن اجرا سعی بر آن بود که از دو ضعف اجتناب شود، اول اینکه عنصری از عناصر این رویکرد، در مراحل تدریس از قلم نیفتد و دیگر آنکه عنصری که در این رویکرد جایی ندارد، حین اجرا به آن اضافه نشود. به این معنا که اگر این مطالعه مدعی است این روش تدریس، به فرآیندهایی مانند گفتمان ریاضی و تفکر با صدای بلند و بازنماییهای چندگانه اجازهٔ بروز و ظهور می‌دهد، حتماً حین اجرا، زمینه برای طرح این پتانسیلها آماده باشد و در عین حال از کاربرد سایر روشها و مهارتهایی که با این روش تدریس قرابتی ویژه ندارند، تا حد ممکن صرفنظر شود.

در مرحله مشاهده، لازم می‌نمود که فرآیند عمل، مورد بازبینی قرار گیرد، بنابراین نگرشی دوباره از چشم‌اندازهای متفاوت، به آنچه در کلاس درس اتفاق می‌افتد، ضروری به نظر می‌رسید. چشم‌اندازهایی گوناگون که هر کدام بخشی از پازل عمل تربیتی را تکمیل می‌کنند. به این‌ترتیب پس از کسب مجوز قانونی و دریافت رضایتنامه از اولیای دانش‌آموزان[1]، از همهٔ جلسات تدریس، ضبط ویدئویی به عمل آمد. علاوه بر ضبط ویدئو و بازبینی آن به هدف تشخیص نقاط قوت و ضعف پس از هر جلسهٔ آموزشی، یادداشت‌نگاری هفتگی دانش‌آموزان پس از پایان درس، لنز دیگری بود که برای مشاهدهٔ دقیق‌تر و وسیع‌ترِ اتفاقات کلاس درس، انتخاب شد. طی این یادداشتها دانش‌آموزان با بیان تفاوت کلاس ریاضی فعلی با کلاسهای ریاضی که در سالهای گذشته تجربه کرده بودند، تلویحاً شواهدی را در تأیید استفاده از راه‌حلهای چندگانه و علاوه بر آن راهنمایی برای بهبود عمل تدریس، فراهم می‌آوردند. در نهایت برآیند بازخوردهای حاصل از بازبینی و تحلیل تصاویر ضبط شده از چشم‌اندازهای متفاوت در مرحلهٔ پیشین، به عنوان آخرین مرحله از کنش‌پژوهشی موسوم به باز اندیشی، رهنمونهایی را برای بهبود عمل تدریس در جلسات بعد فراهم می‌کرد.

۱. اولیای دو دانش‌آموز به ضبط ویدیویی رضایت ندادند، لذا این دانش‌آموزان هنگام ضبط فیلم در مکانی مستقر شدند که در زاویهٔ دید دوربین نباشند.

به منظور بررسی وضعیت دانشی دانش‌آموزان و مقایسهٔ آن، پیش و پس از قرار گرفتن در معرض رویکرد آموزشی مورد نظر، پیش از آغاز دورهٔ آموزشی و پس از پایان آن، آزمون سنجش تعمیم به شکل پیش‌آزمون و پس‌آزمون روی گروه مداخله برگزار شد و علاوه بر آن، آزمون تعمیم روی گروه دیگری موسوم به گروه کنترل –که تحت آموزش با رویکرد راه‌حلهای چندگانه نبودند– اجرا شد.

شرکت کنندگان این مطالعه به فراخور الزامات کنش‌پژوهی، نمونه‌ای هستند شامل ۴۷ دانش‌آموز (۲۰ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی، ۲۷ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی) که در سال تحصیلی ۹۵ -۱۳۹۴، از یکی از مدارس دولتی تهران انتخاب شده‌اند. برای انتخاب گروه کنترل، به هدف انتخاب گروه همتای مناسب و کاهش سوگیریهای احتمالی، با مشورت مدیر گروه ریاضی منطقهٔ آموزش و پرورش مربوطه، سه مدرسهٔ دولتی در همان منطقه، با شرایط آموزشی یکسان و نزدیک به گروه آزمایش انتخاب شد. گروه کنترل را دانش‌آموزان سه کلاس از این سه مدرسه، شامل ۵۴ دانش‌آموز (۲۰ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۳۴ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی) تشکیل دادند.

ابزار پژوهش

برای تهیهٔ ابزار سنجش مهارت تعمیم، ابتدا بانکی متشکل از مقالات معتبر و کتب صاحب‌نظران در این حوزه تهیه و سؤالات مربوط به تعمیم از آن استخراج شد (برای نمونه کای[1]، ۲۰۰۲، ووگل[2]، ۲۰۰۵؛ کوپر و وارن ، ۲۰۰۸؛ زازکیس و همکاران، ۲۰۰۸؛ آمیت و نریا[3]، ۲۰۰۸؛ کاراهر، مارتینز و شلیمان[4]، ۲۰۰۸؛ تانیشلی و اوزداش[5]، ۲۰۰۹؛ بکر[6] و ریورا، ۲۰۰۸؛ وارنر، شور و دیویس[7]، ۲۰۰۹؛ ریورا، ۲۰۱۰؛ یسیلدره و آکوچ[8]، ۲۰۱۰؛ میسن و همکاران، ۲۰۱۰، پیدمونته و بوخبیندر[9]، ۲۰۱۱؛ زاپاترا و کالیو[10]، ۲۰۱۳؛ جردک و الموهیر، ۲۰۱۴؛ صدیقی، ۱۳۸۷؛ شجاعی، ۱۳۹۱). سپس به کمک این بانک سؤال و بر اساس تقسیم‌بندی جردک و الموهیر (۲۰۱۴) از مفهوم تعمیم، دو آزمون در قالب پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای سنجش مهارت تعمیم طراحی شد. برای اطمینان از روایی محتوایی این دو آزمون، تناسب سطح دشواری سؤالات با توان دانش‌آموزان در

1. Cai
2. Vogel
3. Amit & Neria
4. Carraher , Martinez & Schliemann
5. Tanişli & Özdaş
6. Becker
7. Warner, Schorr & Davis
8. Yesildere & Akkoç
9. Pedemonte & Buchbinder
10. Zapatera & Callejo

این مقطع سنی و همچنین تناسب سطح دشواری سوالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون، آزمونها برای چند تن از متخصصان موضوعی در حوزهٔ ریاضی، آموزش ریاضی و معلمان مجرب ارسال شد. علاوه بر آن آزمونها به دو زبان انگلیسی و آلمانی برگردانده شد و طی مکاتبات الکترونیکی به تأیید متخصصان آموزش ریاضی در خارج از کشور نیز رسید. پس از اطمینان از این موارد و نمره‌گذاری آزمونها، پیش‌آزمون و پس‌آزمون به شکل آزمایشی در یکی از مدارس دخترانهٔ دولتی در منطقهٔ ۳ آموزش‌و پرورش تهران روی شماری از دانش‌آموزان دو رشتهٔ ریاضی و تجربی به اجرا گذاشته شد تا علاوه بر اطمینان از روان‌بودن واژه‌پردازیها، از مدت زمان لازم برای برگزاری آزمون و همین‌طور تناسب سطح دشواری دو آزمون با هم و تناسب سطح دشواری هر آزمون با توانایی دانش‌آموزان، تخمینی مناسب حاصل شود.

پس از تحلیل و بررسی نتایج حاصل از اجرای آزمایشی، آزمونها مورد اصلاح و ویرایش قرار گرفتند. در نهایت برای هر آزمون ۵ سؤال مجزا طراحی شد. از آنجا که برخی از این سؤالات خود شامل چند پرسش خردتر بودند، در مجموع ۱۷ پرسش به پیش‌آزمون و معادل همین تعداد به پس‌آزمون اختصاص یافت. از این تعداد، ۵ پرسش به سنجش مرحلهٔ نخست تعمیم (تعمیم فوری)، ۵ پرسش به سنجش مرحلهٔ دوم تعمیم (تعمیم نزدیک) و ۷ پرسش به سنجش تعمیم کلی (تعمیم دور) می‌پرداخت.

اجرای آزمونها

در اجرای اصلی پس از تنظیم و تأیید نهایی سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون، آزمون سنجش تعمیم ابتدای دورهٔ آموزشی، روی گروه مداخله برگزار شد. دورهٔ آموزشی حدود سه ماه به طول انجامید و طی آن درس ریاضیات۲، با تأکید بر راه‌حلهای چندگانه به دانش‌آموزان دو کلاس تجربی و ریاضی در مقطع دوم متوسطه، آموزش داده شد. دلیل انتخاب این درس این بود که هم قابلیت تدریس به کمک راه‌حلهای چندگانه را به خوبی داراست و هم اینکه در برنامه‌ریزی هفتگی مدارس، پنج ساعت آموزشی به آن اختصاص دارد و چنین زمانی برای تحقق بخشیدن به هدف این پژوهش، مناسب به نظر می‌رسید. به‌علاوه این درس، در دو رشتهٔ تجربی و ریاضی به شکلی واحد و با کتاب درسی یکسان ارائه شده است، از این رو امکان مقایسهٔ اثربخشی رویکرد مورد استفاده در این پژوهش را در دو گروه با توانایی بالاتر و توانایی کم‌تر فراهم می‌ساخت. پس از پایان دورهٔ آموزشی، آزمون سنجش تعمیم روی گروه مداخله و گروه کنترل مجدداً به اجرا گذاشته شد. گفتنی است که محتوای پیش‌آزمون و پس‌آزمون، مستقل از محتوای آموزشی این دوره است. چرا که

هدف پژوهشگر آن است که ریشه‌های استدلال، نگرش استقرایی و چگونگی تفکر را طی دوره آموزشی در ذهن دانش‌آموزان فعال کند و به دانش‌آموزان مهارت چگونه اندیشیدن در حوزهٔ ریاضیات را بیاموزد، حال آنکه یکسانی محتوای آموزشی با محتوای آزمونها، اعتبار نتایج را خدشه‌دار می‌نمود.

یافته‌ها

پس از برگزاری پیش‌آزمون و پس‌آزمون، پاسخنامه و روش نمره‌گذاری هر آزمون در اختیار دو مصحح قرار گرفت و همهٔ آزمونها را دو مصحح، نمره‌گذاری کردند. پس از کسب توافق ۹۹ درصدی میان نمرات مصحح اول و دوم و کسب اطمینان از صحت نمره‌گذاریها و لذا عدم نیاز به سومین مصحح، تحلیل نتایج در دستور کار قرار گرفت. در این بخش علاوه بر اشاره به نتایج تحلیلهای کمّی، تحلیل کیفی سؤال به سؤال پرسشهای پیش‌آزمون و پس‌آزمون و بررسی پاسخهای دانش‌آموزان، مجالی دیگر برای تأمل در اختیار می‌نهد که در فرصت مقتضی بدان اشاره خواهد شد.

در جدول۱ نتایج به دست آمده از شاخصهای توصیفی، میان گروه مداخله (دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تجربی)، پیش از آموزش و پس از آموزش گزارش شده است. جهت بررسی تاثیر آموزش بر تعمیم دور، تعمیم نزدیک و تعمیم فوری در دو گروه، از آزمون اندازه‌گیری مکرر (طرح یک بین–یک درون) استفاده شده است.

جدول ۱: آماره‌های توصیفی تعمیم دور، تعمیم نزدیک و تعمیم فوری در دو گروه مداخله در پیش آزمون و پس آزمون

متغیر / گروه		رشته ریاضی (۲۰ نفر)		رشته تجربی (۲۷ نفر)	
		میانگین	انحراف استاندارد	میانگین	انحراف استاندارد
تعمیم دور	پیش‌آزمون	۳/۹۹	۲/۶۹	۳/۵۶	۲/۳۵
	پس‌آزمون	۶/۶۳	۱/۵۶	۴/۸۰	۲/۴۸
تعمیم نزدیک	پیش‌آزمون	۲/۰۶	۰/۹۰	۲/۱۵	۱/۰۲
	پس‌آزمون	۲/۸۶	۰/۹۰	۲/۷۳	۰/۹۲
تعمیم فوری	پیش‌آزمون	۳/۱۸	۰/۶۱	۳/۱۲	۰/۶۳
	پس‌آزمون	۳/۲۹	۰/۴۱	۳/۲۳	۰/۵۹

آزمون همگنی واریانس (لوین) برابری واریانس را در میان دو گروه مداخله، در دو مرحلهٔ اندازه‌گیری تأیید کرد، به این معنی که دو گروه از نظر پراکندگی یکسان بوده‌اند.

نتایج آزمون تحلیل واریانس تک‌متغیری اثر بین آزمودنی در ردیف اول تا سوم جدول ۲، تمام مقادیر P را بیش از ۰/۰۵ نشان می‌دهد. لذا میان دو گروه مداخله در تعمیم دور، تعمیم نزدیک و

تعمیم فوری، تفاوت معناداری وجود ندارد. بیشترین تغییر در محور تعمیم دور –که آن را می‌توان مهم‌ترین مرحلهٔ تعمیم دانست– رخ داده است، ولی این تفاوت نیز معنادار نیست. بدین لحاظ می‌توان مدعی شد که دو گروه دانش‌آموزان ریاضی و تجربی در این سه مؤلفه، عملکردی تقریباً یکسان داشته‌اند.

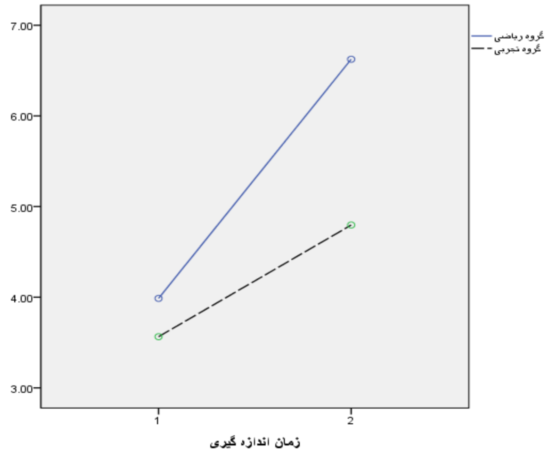
نتایج اثر درون آزمودنی نیز حاکی از این بود که از پیش‌آزمون به پس‌آزمون میانگین تعمیم دور و تعمیم نزدیک افزایشی معنادار یافته و آموزش داده شده تأثیری مثبت داشته است (P=۰/۰۰۱) اما در محور تعمیم فوری تفاوت معناداری دیده نمی‌شود (P=۰/۲۶). عدم معناداری تفاوت در این مؤلفه را می‌توان به عملکرد نزدیک به سقف دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در این محور نسبت داد.

نتایج اثر تعاملی نیز نشان می‌دهد که هر چند گروه ریاضی، نسبت به گروه تجربی بیشترین رشد را در محور تعمیم دور داشته است، اما به طور کلی نتایج اثر تعاملی معنادار نیست و هیچ یک از گروهها نسبت به گروه دیگر از پیش‌آزمون به پس‌آزمون عملکردی بهتر نداشته است.

جدول ۲: نتایج تحلیل واریانس تک متغیری با اندازه‌گیری مکرر برای خرده مقیاسهای تعمیم

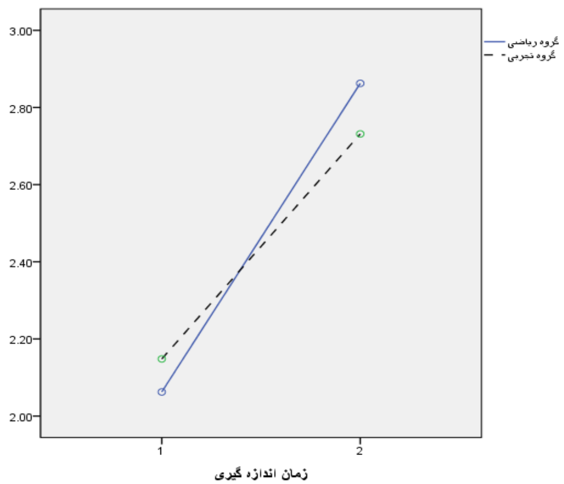
منبع اثر	SS	df	MS	F	P	η^2
اثر بین آزمودنی (گروه) تعمیم دور	۲۹/۱۲	۱	۲۹/۱۲	۳/۷۳	۰/۰۶	۰/۰۸
اثر بین آزمودنی (گروه) تعمیم نزدیک	۰/۰۱	۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۹۲	۰/۰۰۱
اثر بین آزمودنی (گروه) تعمیم فوری	۰/۰۷	۱	۰/۰۷	۰/۱۶	۰/۶۹	۰/۰۰۱
خطای بین آزمودنی (گروه) تعمیم دور	۳۵۱/۱۸	۴۵	۷/۸۰			
خطای بین آزمودنی (گروه) تعمیم نزدیک	۵۵/۱۵	۴۵	۱/۲۳			
خطای بین آزمودنی (گروه) تعمیم فوری	۱۹/۷۲	۴۵	۰/۴۴			
اثر درون آزمودنی (زمان) تعمیم دور	۸۵/۹۹	۱	۸۵/۹۹	۲۸/۳۴	۰/۰۰۱	۰/۳۹
اثر درون آزمودنی (زمان) تعمیم نزدیک	۱۰/۹۹	۱	۱۰/۹۹	۲۰/۰۶	۰/۰۰۱	۰/۳۱
اثر درون آزمودنی (زمان) تعمیم فوری	۰/۲۹	۱	۰/۲۹	۱/۳۳	۰/۲۶	۰/۰۳
اثر تعاملی زمان×گروه؛ تعمیم دور	۱۱/۳۶	۱	۱۱/۳۶	۳/۷۴	۰/۰۶	۰/۰۸
اثر تعاملی زمان×گروه؛ تعمیم نزدیک	۰/۲۷	۱	۰/۲۷	۰/۴۹	۰/۴۹	۰/۰۱
اثر تعاملی زمان×گروه؛ تعمیم فوری	۰/۰۰۱	۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۹۹	۰/۰۰۱
خطای درون آزمودنی تعمیم دور	۱۳۶/۵۳	۴۵	۳/۰۳			
خطای درون آزمودنی تعمیم نزدیک	۲۴/۶۶	۴۵	۰/۵۵			
خطای درون آزمودنی تعمیم فوری	۹/۷۴	۴۵	۰/۲۲			

همان‌گونه که بیان شد، نمودار ۱ گویای آن است که میانگین مؤلفهٔ تعمیم دور از پیش‌آزمون به پس‌آزمون در دو گروه افزایش داشته است و گروه ریاضی در این مؤلفه افزایش بیشتری داشته است، اما این افزایش از نظر آماری معنادار نیست.



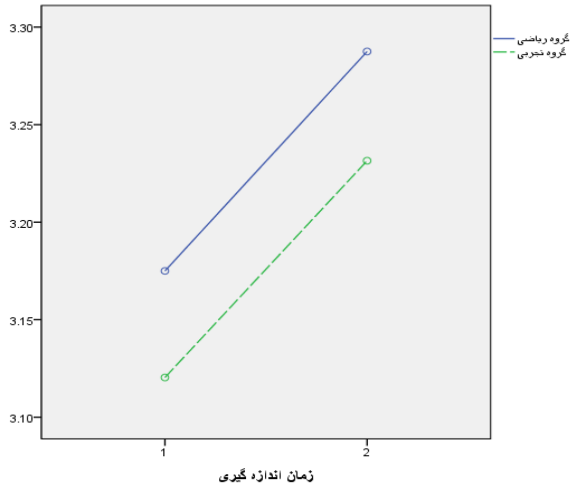
نمودار ۱: میانگین تعمیم دور در دو گروه دانش‌آموزان ریاضی و تجربی در پیش آزمون و پس آزمون

دومین مؤلفهٔ تعمیم، تعمیم نزدیک است. نمودار ۲ نشان می‌دهد میانگین، از پیش‌آزمون به پس‌آزمون با روندی افزایشی همراه بوده و دانش‌آموزان دو گروه ریاضی و تجربی به یک میزان در تعمیم نزدیک عملکردی بهتر از خود نشان داده‌اند. در این مرحله از تعمیم نیز گروه ریاضی افزایش بیشتری داشته است، اما این افزایش از نظر آماری معنادار نیست.



نمودار ۲: میانگین تعمیم نزدیک در دو گروه ریاضی و تجربی در پیش آزمون و پس آزمون

نمودار ۳ میانگین تعمیم فوری را در دو گروه دانش‌آموزان ریاضی و تجربی نشان می‌دهد. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، نتایج حاکی از این است که دانش‌آموزان در هر دو گروه، به یک نسبت از خود عملکردی بهتر به نمایش گذاشته‌اند.



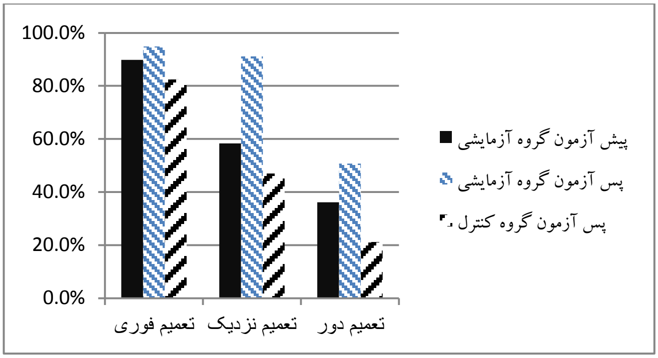
نمودار ۳: میانگین تعمیم فوری در دو گروه ریاضی و تجربی در پیش آزمون و پس آزمون

برای اعتبار بخشی به نتایج به‌دست آمده از آموزش داده شده، دو گروه کنترل دیگر که معادل دو گروه مداخله ریاضی و تجربی بودند، انتخاب و اندازه‌گیری شدند. نتایج به‌دست آمده حاکی از این بود که میانگین تعمیم دور، تعمیم نزدیک و تعمیم فوری در گروه مداخله تجربی و ریاضی نسبت به گروه کنترل تجربی و ریاضی بالاتر است. به این معنی که آموزش داده شده بر تعمیم تأثیر داشته است.

در جدول ۳ دانش‌آموزان گروه مداخله و کنترل صرف‌نظر از رشتهٔ تحصیلی در پیش‌آزمون و پس‌آزمون مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. نمودار ۴ تصویر روشنی از این مقایسه به دست می‌دهد و گویای رشد نتایج در تمامی مؤلفه‌های تعمیم از پیش‌آزمون به پس‌آزمون در گروه مداخله و نیز عملکرد بهتر دانش‌آموزان گروه مداخله نسبت به گروه کنترل در پس‌آزمون است.

جدول۳: مقایسهٔ افراد موفق در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در خرده‌مهارتهای مربوط به تعمیم

	نوع تعمیم	تعمیم فوری	تعمیم نزدیک	تعمیم دور
پیش آزمون در گروه آزمایش	درصد افراد موفق	٪ ۸۹/۸	٪ ۵۸/۳	٪ ۳۶/۲
پس آزمون در گروه آزمایش	درصد افراد موفق	٪ ۹۴/۹	٪ ۹۱/۱	٪ ۵۰/۷
پس‌آزمون در گروه کنترل	درصد افراد موفق	٪ ۸۲/۶	٪۴۷	٪ ۲۱/۲



نمودار ۴: درصد افراد موفق در خرده‌مهارتهای تعمیم در پیش‌آزمون و پس‌آزمون (گروه مداخله و کنترل)

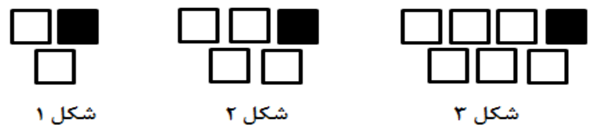
بررسی پاسخهای دانش‌آموزان

همان‌طور که اشاره شد سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون به سه محور تعمیم فوری، تعمیم نزدیک و تعمیم دور اختصاص داشت که در ادامه به نمونه‌هایی از این پرسشها و پاسخهای دانش‌آموزان به هر محور اشاره خواهد شد.

الف) تعمیم فوری: پیشتر مطرح شد که در پیش‌آزمون و پس‌آزمون، پنج پرسش از ۱۷ پرسش و در واقع ۳/۵ نمره از ۱۶ نمره، به سنجش تعمیم فوری اختصاص داشت. در این‌گونه سؤالات انتظار می‌رود که دانش‌آموز به کمک رسم شکل یا شمارش بتواند مرحله بلافاصله‌ای از الگوی داده شده را تشخیص دهد. در این مطالعه اکثر دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به این سؤالات موفق عمل کرده‌اند و درصد افراد موفق در پاسخ‌گویی به این سؤالات از پیش‌آزمون به پس‌آزمون، با رشد ۵ درصدی همراه بوده و از ٪ ۸۹/۸ به ٪ ۹۴/۹ افزایش یافته است. نمونهٔ این نوع پرسش در پیش‌آزمون و پرسش نظیر آن در پس‌آزمون در شکل ۱ و شکل ۲ قابل بررسی است.

به الگوی زیر دقت کنید:

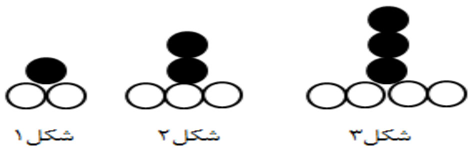
الف) شکل ۴ را رسم کنید



شکل ۱: نمونه‌ای از پرسش مربوط به تعمیم فوری در پیش‌آزمون

به الگوی زیر دقت کنید:

الف) شکل پنجم را رسم کنید.

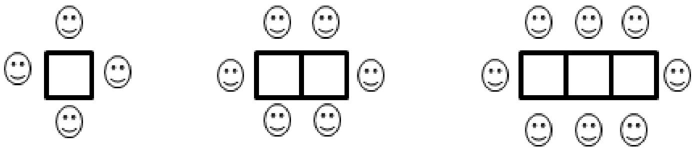


شکل ۲: نمونه‌ای از پرسش مربوط به تعمیم فوری در پس‌آزمون

ب) تعمیم نزدیک: در سؤالات مربوط به تعمیم نزدیک، رسیدن به پاسخ با رسم یا شمارش مرحله به مرحله ممکن می‌شود و معمولاً شامل اعداد بزرگ است. تعمیم نزدیک، پلی است میان تعمیم فوری و تعمیم دور و رسیدن به مرحلهٔ آخر بدون گذر از این مرحله ممکن به نظر نمی‌رسد. در پیش‌آزمون و پس‌آزمون، پنج پرسش از ۱۷ پرسش و ۳/۵ نمره از ۱۶ نمره کل، به این محور اختصاص یافت. درصد افراد موفق در این محور از ۵۸/۳ ٪ در پیش‌آزمون به ۹۱/۱ ٪ در پس‌آزمون افزایش داشت. شکل۳، نمونه‌ای از سؤالات پیش‌آزمون است که قسمت (ب) آن، به سنجش مهارت تعمیم نزدیک مربوط است.

در یک مهمانی دور هر میز **۴** نفر می‌نشینند.

اگر دو میز را به هم بچسبانیم، ۶ نفر می‌توانند دور آن بنشینند.



الف) اگر **۵** میز را به همین ترتیب به هم بچسبانیم، چند نفر جای نشستن خواهند داشت؟

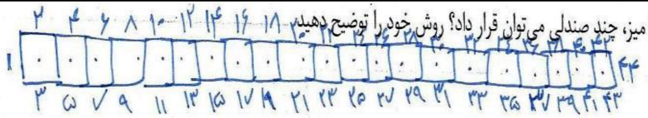
ب) اطراف **۲۱** میز، چند صندلی می‌توان قرار داد؟

شکل۳: نمونه‌ای از پرسش مربوط به تعمیم نزدیک در پیش‌آزمون

پاسخهای قابل قبول به این پرسش در پیش‌آزمون، در جدول ۴ قابل بررسی است.

جدول ۴: پاسخهای قابل قبول دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به یکی از پرسشهای تعمیم نزدیک در پیش‌آزمون

روش حل/ نمایش پاسخ	پیش‌آزمون	تعداد
۲+ (۲×۲۱)	ب) اطراف **۲۱** میز، چند صندلی می‌توان قرار داد؟ روش خود را توضیح دهید ۴۴ صندلی می‌توان قرارداد. سرهرمیز دونفر می‌توانند بنشینند بنابراین ۴۲=۲×۲۱ برابر با ۴۲ نفر می‌باشد ۱ نفر در سمت راست قرار می‌گیرد و یک نفر هم در سمت چپ میزها پس این ۲ نفر با ۴۲ جمع شده و جواب ما ۴۴ در می‌آید.	۲۵ نفر
۲×(۲۱+۱)	ب) اطراف **۲۱** میز، چند صندلی می‌توان قرار داد؟ روش خود را توضیح دهید. ضرب‌هایی به دست آوردم ۲۱ تعداد میز است (۲۱ ×۱) ۲۲ ۸۴/۲ = ۴۴ نفر	۲ نفر

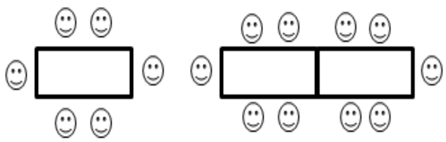
۶+(۲− ۲×(۲۱	ب) اطراف **۲۱** میز، چند صندلی می‌توان قرار داد؟ روش خود را توضیح دهید. ۲۱−۲=۱۹ ۲×۳=۶ ۱۹×۲=۳۸ ⟸ ۳۸+۶=۴۴	۳نفر
رسم شکل	ب) اطراف **۲۱** میز، چند صندلی می‌توان قرار داد؟ روش خود را توضیح دهید.  من به جای میزها ۲۱ مربع پشت سرهم کشیدم و حساب کردم بودیم که ۴۴ صندلی می توانیم قرار بدیم. می دانم روش بچه گانه و وقت گیری است ولی خودم می خواستم ببینم به من ثابت شود، در غیر این صورت ممکن بود اشتباه شود.	۴نفر
	در مجموع ۳۴ پاسخ قابل قبول	

پرسش نظیر، در پس‌آزمون به این شکل است:

در یک مهمانی دور هر میز مستطیل شکل **۶** نفر می‌نشینند. اگر دو میز را به هم بچسبانیم، **۱۰** نفر می‌توانند دور آن بنشینند.

الف) اگر **۴** میز را به همین ترتیب به هم بچسبانیم، چند نفر جای نشستن خواهند داشت؟

ب) برای **۲۳** میز چطور؟ دلیلتان را توضیح دهید.



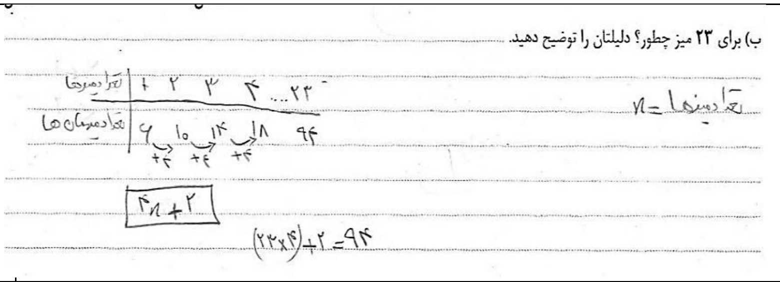
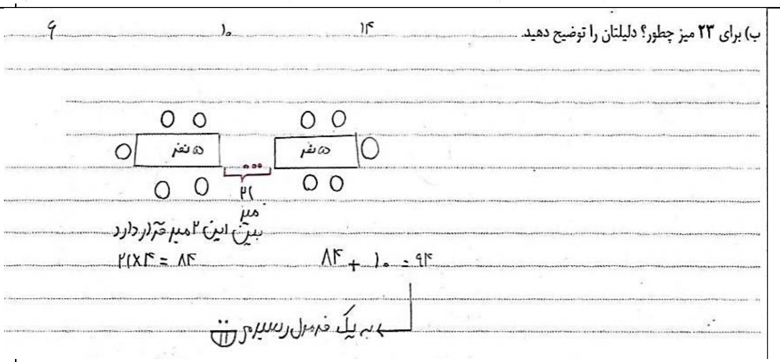
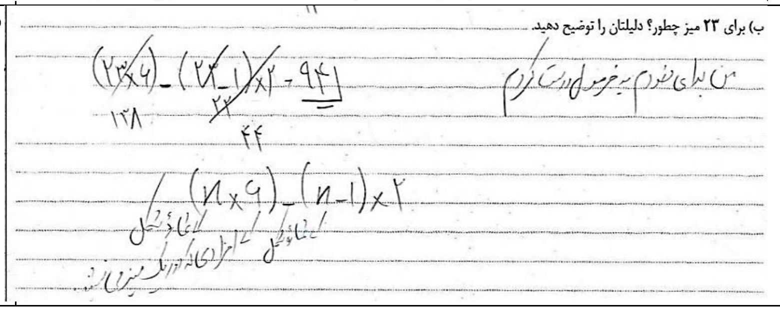
شکل۲ شکل ۱

شکل ۴: نمونه‌ای از پرسش مربوط به تعمیم نزدیک در پس‌آزمون

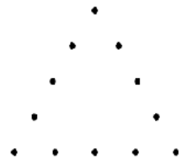
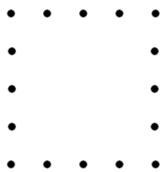
پاسخهای صحیح دانش‌آموزان به این پرسش در پس‌آزمون در جدول ۵ قابل مشاهده است. همان‌طور که دیده می‌شود علاوه بر آنکه تعداد افراد موفق در پاسخ‌گویی به این سؤال افزایش داشته، هیچ‌یک از دانش‌آموزان در پس‌آزمون، از راهبرد رسم شکل –که در پاسخ‌گویی به این سؤال راه موجهی به نظر نمی‌رسد– استفاده نکرده و روشهای حل منطقی‌تر جایگزین این روش شده است.

جدول ۵: پاسخهای قابل قبول دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به یکی از پرسشهای تعمیم نزدیک در پس‌آزمون

روش‌حل/ نمایش پاسخ	پس‌آزمون	تعداد
۲+ (۲۳×۴)	ب) برای **۲۳** میز چطور؟ دلیلتان را توضیح دهید. ۲۳×۴+۲= ۹۲+۲=۹۴ نفر	۲۷ نفر

<table>
<tr><td>استفاده از دنباله حسابی در رسیدن به فرمول</td><td>
</td><td>۲نفر</td></tr>
<tr><td>−(۲) + ۱۰
۴×(۲۳</td><td>
</td><td>۲نفر</td></tr>
<tr><td>− ۲×(۲۳−۱)
۶×۲۳</td><td>
</td><td>۵ نفر</td></tr>
<tr><td colspan="3">در مجموع ۳۶ پاسخ قابل قبول</td></tr>
</table>

ج)تعمیم دور: پرسشهای مربوط به تعمیم دور مستلزم آن است که دانش‌آموز از محدودیتهای عملی شمارش یا رسم مرحله به مرحله فراتر رود و رابطهٔ میان حداقل دو متغیر را در حالت کلی بیان کند. این مرحله در واقع گذر از مرحلهٔ تشخیص تعمیم و ورود به مرحلهٔ بیان تعمیم است. سؤالات این بخش به دو شکل در آزمون مطرح شد که در یکی، بیان تعمیم به زبان ریاضی یا کلامی پس از مشاهدهٔ مراحل تعمیم فوری و تعمیم نزدیک مد نظر بود و در دیگری بدون آن. در شکل ۵، به نمونه‌ای از پرسشهای مربوط به تعمیم دور در پیش‌آزمون و پس‌آزمون اشاره شده و نتایج مربوط به پاسخهای ثبت شده برای این دو سؤال، در جدول ۶ مقایسه شده است.

پیش‌آزمون	پس‌آزمون
روی هر ضلع این مثلث ۵ نقطه داریم. این مثلث در مجموع با ۱۲ نقطه ساخته شده است. فرض کنید مثلثی روی هر ضلعش، n نقطه داشته باشد، در این‌صورت تعداد کل نقاط مثلث چند تاست؟ 	روی هر ضلع این مربع ۵ نقطه داریم. این مربع در مجموع با ۱۶ نقطه ساخته شده است. فرض کنید مربعی روی هر ضلعش n نقطه داشته باشد. در این صورت تعداد کل نقاط روی مربع چند تاست؟ 

شکل ۵: نمونه‌ای از پرسشهای مربوط به تعمیم دور در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

مرور پاسخهای مربوط به این پرسش در آخرین ستون، نشان می‌دهد که در پیش آزمون ۲۶ نفر یعنی بیش از نیمی افراد نمونه، پاسخی به سؤال نداده یا پاسخی کاملاً نادرست ارائه کرده‌اند، این رقم در پس‌آزمون به ۱۲ نفر و به عبارتی، یک چهارم حجم نمونه کاهش می‌یابد. همچنین آمار کسانی که در پاسخ‌گویی کاملاً موفق بوده‌اند از ۳۶/۲ درصد به ۵۱/۱ درصد افزایش یافته است.

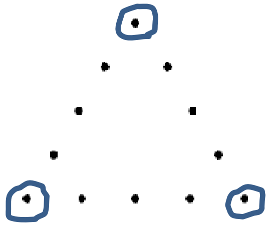
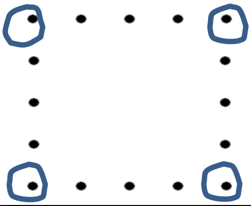
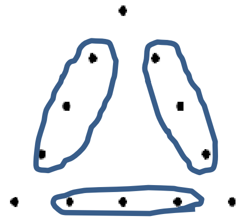
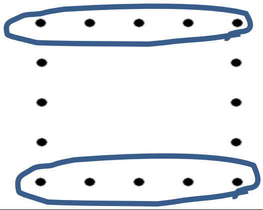
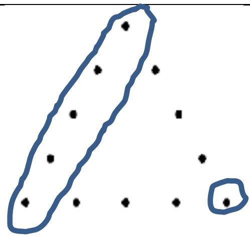
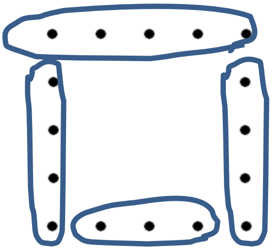
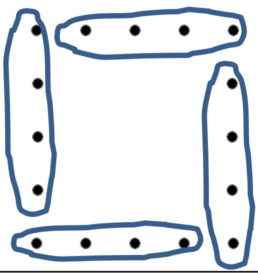
جدول ۶: مقایسهٔ پاسخهای ارائه شده به یکی از سؤالات تعمیم دور در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

	کیفیت پاسخ ارائه شده	قابل قبول	ناقص	پاسخ غلط یا بدون پاسخ
پیش‌آزمون	تعداد	۱۷	۴	۲۶
	درصد	٪ ۳۶/۲	٪ ۸/۵	٪ ۵۵/۳
پس‌آزمون	تعداد	۲۴	۱۱	۱۲
	درصد	٪ ۵۱/۱	٪ ۲۳/۴	٪ ۲۵/۵

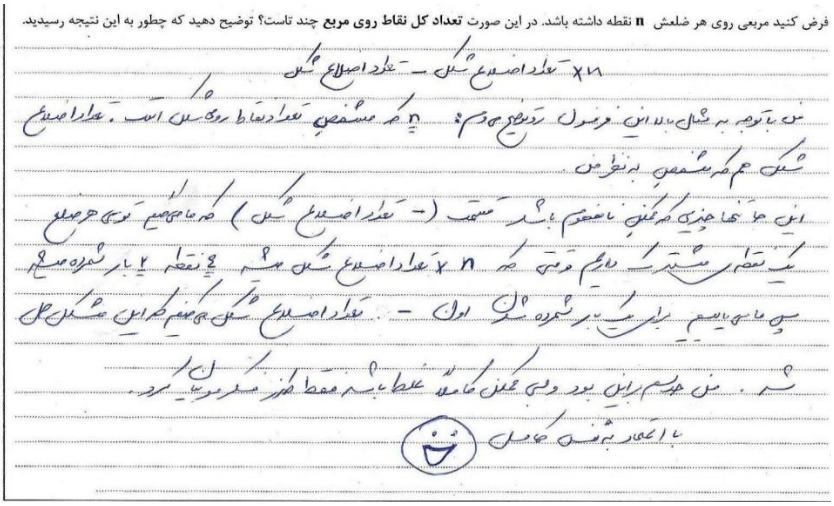
تعداد پاسخهای قابل قبول دانش‌آموزان و توضیح روشهای حل این دو پرسش، در جدول۷ قابل بررسی است.

جدول ۷: پاسخهای قابل قبول به یکی از سؤالات تعمیم دور در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

روش حل پرسش در پیش‌آزمون	تعداد	روش حل پرسش در پیش‌آزمون	تعداد
بدون شرح : ۳n-۳	۱	بدون شرح : ۴n − ۴	۱

۳n-۳	تعداد کل نقاط ۳n است که ۳ نقطه را کم می‌کنیم چون بین اضلاع مشترک است. 	۱۱	۴n-۴	تعداد اضلاع مربع ضرب در تعداد نقاط روی هر ضلع منهای تعداد اضلاع می‌شود: ۴n − ۴ 	۱۴
۳(n-۲)+۳	۳= ۲-۵ ۳را در ۳ ضرب می‌کنیم و با ۳ جمع می‌کنیم. 	۱	۲n+۲(n-۲)	۲n به این دلیل که دو ضلع مربع را اول کامل نقاطش را می‌شماریم و برای دو ضلع بعدی دو نقطه کم می‌کنیم. 	۱
n+۱+۲(n-۲)	یک ضلع را به تعداد نقطه‌ها می‌شمارم + نقطهٔ روبرو. از ۲ ضلع دیگر، ۲ تا کم می‌کنم می‌شود ۳ تا. دو ضلع داریم: ۶=۲×۳ ۱۲= ۶+۱+۵ تا نقطه داریم. 	۱	n+۲(n-۱)+(n-۲)	۲ – ۵ و ۱ – ۵ و ۱ – ۵ و ۵ =۴(۵– ۱) 	۱
استقرایی	اگر روی هر ضلعش ۴ نقطه باشد، ۹= ۳- (۳×۴) و اگر ۵ نقطه داشته باشد: ۱۲=۳-(۳×۵)، پس ۳n-۳ نقطه داریم.	۳	استقرایی	اگر مربع روی هر ضلعش ۴نقطه باشد، ۱۲=۴- (۴×۴) و اگر ۵ نقطه داشته باشد: ۱۶= ۴ – (۴×۵)، پس ۴n-۴ نقطه داریم.	۱
			۴(n-۱)	با توجه به شکل ۴ تا نقطه مشترک داریم. 	۵
				شکل ۹ را ببینید.	۱
	۱۷ پاسخ صحیح در پیش‌آزمون (۳۶/۲٪)			۲۴ پاسخ صحیح در پس‌آزمون (۵۱/۱٪)	

تحلیل روشهای حل این مسأله، این ادعا را شکل می‌دهد که تنوع روشهای حل یک سؤال به طور کلی در پس‌آزمون افزایش یافته و استفاده از راه‌حلهای چندگانه در تدریس، پیامدهای دیگری را نیز به همراه داشته است؛ پیامدهایی که هر چند در این مقاله مجالی برای پرداختن به آنها نیست، اما افزایش اشتیاق دانش‌آموزان به پاسخ‌گویی و مواجههٔ منطقی‌تر و دوستانه‌تر با سؤالات ریاضی، پیامدی است که از آن نمی‌توان به سادگی گذشت. در اثبات این مدعا به پاسخ یکی از دانش‌آموزان در پس‌آزمون اشاره می‌شود. این دانش‌آموز — که طی دورهٔ آموزشی، بیشترین مقاومت را در برابر پذیرش روش راه‌حلهای چندگانه از خود نشان داد– در پاسخ‌گویی به سؤال نظیر در پیش‌آزمون، کاملاً ناموفق بوده و نمره‌ای کسب نکرده است، اما جامع‌ترین پاسخ را در پس‌آزمون ارائه کرده است و در واقع فرمولی را برای نه تنها مربع، که هر چند ضلعی با این ویژگی ارائه کرده است (شکل ۶).


فرض کنید مربعی روی هر ضلعش **n** نقطه داشته باشد. در این صورت **تعداد کل نقاط روی مربع** چند تاست؟ توضیح دهید که چطور به این نتیجه رسیدید.

n × تعداد اضلاع شکل − تعداد اضلاع شکل

من با توجه به شکل بالا این فرمول رو توضیح میدم: n که مشخص تعداد نقاط روی ضلع است. تعداد اضلاع شکل هم که مشخص به نظرمن.

این جا تنها چیزی که ممکن نامفهوم باشد منفی (− تعداد اضلاع شکل) که ما میدونیم توی هر ضلع یک نقطه مشترک داریم وقتی که n × تعداد اضلاع شکل میشه هر نقطه ۲ بار شمرده میشه پس ما میاییم برای یک بار شمرده شدن اول − تعداد اضلاع شکل میکنیم که این مشکل حل شد. من جوابم این بود ولی ممکن کاملاً غلط باشه فقط فکر منو بیان کردم.

با افتخار بنفشه کامل

شکل ۶: پاسخ یکی از دنش‌آموزان به یکی از سؤالات تعمیم دور در پس‌آزمون

در حاشیهٔ بررسی کیفی پاسخهای دانش‌آموزان که دریافتهای منحصر به خود را برای پژوهشگر به همراه دارد، برخی یافته‌ها را نمی‌توان منحصر به محور تعمیم دانست اما اهمیت آنها به اندازه‌ای است که به سادگی نمی‌توان از آن چشم پوشید. چرا که به تعبیری نشان‌دهندهٔ ریشهٔ عملکرد نامطلوب دانش‌آموزان در حوزهٔ ریاضی اعم از تعمیم است. برای مثال به نظر می‌رسد اغلب دانش‌آموزان با زبان ریاضی آشنایی کاملی ندارند. پاسخهای دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون حامل شواهدی از رشد ناکافی تفکر جبری و آشنایی سطحی دانش‌آموزان پایهٔ دهم با زبان نمادین ریاضی است که در جدول ۸، قابل مشاهده است.

جدول ۸: شواهدی از عدم آشنایی دانش‌آموزان با زبان ریاضی

مفهوم جبری	نمایش مورد انتظار	نمایش‌های نادرست مشاهده شده
نمایش دو عدد زوج	۲n و ۲m	۲m و ۴m
		x + ۲ و x + ۴
نمایش اعداد فرد	۲k + ۱ یا ۲k - ۱	۳k
	دسته‌بندی‌های دوتایی اشکال	دسته‌بندی سه‌تایی اشکال
سه برابر یک عدد	۳k	$k^{۳}$
نمایش سه عدد صحیح متوالی	k و k+۱ و k+۲	k و ۲k و ۳k
	k+۱ و k و k-۱	

این ضعف را نمی‌توان به پاسخهای نادرست منحصر دانست. به این معنا که حتی در پاسخهای درست و قابل قبول نیز عملیات ساده کردن عبارتهای جبری در پاسخهای اغلب دانش‌آموزان لحاظ نشده است و زبان جبر، زبانی مهجور به نظر می‌رسد (جدول ۹).

جدول ۹: شواهدی از عدم آشنایی کافی دانش‌آموزان با زبان جبر

عبارت جبری ساده شده	عبارت‌های جبری مشاهده شده
$۴n + n^{۲}$	۴n + n × n
	n(n + ۴)
	[(n−۱) +۵]×n
$۲n^{۲} + ۲n$	۲n + n (۲n)
	$۲n + n^{۲} × ۲$
	(n + n) × (n +۱)
	۳n(n + ۲) − n(n + ۴)
	(۲n + ۲) × n
$۳n^{۲} + ۶n$	((n + n) ×(n + ۱)) + n(n + ۴)
	$۴n + n^{۲} + ۲n + n(۲n)$
	n(۳n + ۶)
	$۲n^{۲} + ۲n + n^{۲} + ۴n$

پاسخ به پرسشهای پژوهش

این مطالعه در پاسخ به دو پرسش طراحی شده است. نخست آنکه اثربخشی آموزش به کمک راه‌حلهای چندگانه بر مهارت تعمیم در دانش‌آموزان متوسطه به چه میزان است؟ نتایج تحلیل آزمونهای برگزار شده نشان می‌دهد که استفاده از این روش، توانسته است به خوبی مهارت تعمیم را در هر دو گروه دانش‌آموزان تجربی و ریاضی افزایش دهد. از این رو نتایج این مطالعه با مطالعاتی مانند لینچ و استار (۲۰۱۴) و استار و جانسن (۲۰۰۸) که مدعی‌اند مقایسهٔ چند راه‌حل

برای حل یک مسأله، تأثیری مثبت بر روند بهبود تلاشهای یادگیری دانش‌آموزان دارد و استفاده از این روش را کلید دستیابی به دانش عمیق ریاضی می‌دانند (شوکایلو و کروگ[1]، ۲۰۱۴) همسوست.

پرسش دوم در پی پاسخی برای دستیابی به میزان اثربخشی این رویکرد بر دانش‌آموزانی با مهارت بالا و پایین‌تر در درس ریاضی است. نتایج تحلیلها نشان می‌دهد که در تعمیم دور و تعمیم نزدیک عملکرد دانش‌آموزان در هر دو گروه ریاضی و تجربی با رشد مثبت و روند افزایشی همراه بوده است. با این تفاوت که هر چند در این دو محور، میانگین گروه ریاضی افزایش بیشتری دارد، اما این تغییرات معنادار نیست و می‌توان ادعا کرد که دانش‌آموزان دو گروه ریاضی و تجربی به یک میزان عملکردی بهتر از خود نشان داده‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف کلی از انجام دادن این پژوهش، بررسی میزان موفقیت و اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حلهای چندگانه، در تقویت مهارت تعمیم در دانش‌آموزان دورهٔ متوسطهٔ دوم است. علاوه بر آن به استناد مطالعاتی که این روش را تنها برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی مناسب می‌دانند، این مقایسه در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی به تفکیک صورت پذیرفت تا امکان بررسی تأثیرات این روش روی دانش‌آموزان با مهارت بالاتر و پایین‌تر در درس ریاضی فراهم شود.

نتایج تحلیل آزمونهای برگزار شده نشان می‌دهد که استفاده از آموزش به کمک راه‌حلهای چندگانه توانسته است به خوبی مهارت تعمیم را در هر دو گروه دانش‌آموزان تجربی و ریاضی افزایش دهد و به نظر می‌رسد، مقایسهٔ چند راه‌حل برای حل یک مسأله، تأثیری مثبت بر روند بهبود تلاشهای یادگیری دانش‌آموزان داشته است. نتایج این مطالعه، همچنین حاکی از آن است که عملکرد دانش‌آموزان در هر دو گروه ریاضی و تجربی در همهٔ خرده‌مهارتهای مربوط به تعمیم، اعم از تعمیم دور، تعمیم نزدیک و تعمیم فوری، با رشد مثبت همراه بوده است. هر چند میانگین عملکرد گروه ریاضی در خرده مهارت تعمیم دور و تعمیم نزدیک، افزایش بیشتری را نشان می‌دهد اما می‌توان مدعی شد که استفاده از این رویکرد با تمام چالشهای اجرایی، در هر دو گروه با توانایی بالاتر و پایین‌تر با موفقیت همراه بوده است.

نتایج بسیاری از مطالعات با اشاره به چالشها و مشکلات اجرای این روش، نشان می‌دهد که تدریس با چنین شیوه‌ای یادگیرندگان را با سردرگمی مواجه خواهد کرد (لینچ و استار، ۲۰۱۳) و ارائهٔ تصاویر چندگانه به ابهام بیشتر تصویر اولیه دامن خواهد زد (وو، ۱۹۹۶). از این رو جایی

1. Schukajlow & Krug

برای این تردید می‌گذارند که این روش ممکن است برای همهٔ دانش‌آموزان مفید و کارآمد نباشد یا فقط برای دانش‌آموزانی با توانایی بالای علمی، عملی باشد (لینچ و استار، ۲۰۱۳). نتایج این مطالعه در پاسخ به این تردید، هر چند مشکلات و چالشهای به‌کارگیری این روش را به تمامی رد نمی‌کند، اما در مجموع استفاده از این روش را در هر دو گروه با توانایی بالاتر و پایین‌تر مناسب می‌داند. البته ممکن است پیاده‌سازی آن برای دانش‌آموزانی با توانایی کمتر همراه با مشکلات بیشتر باشد.

از میان چالشهای استفاده از این روش می‌توان به کمبود وقت برای ارزیابی عمیق همهٔ راه‌حلهای مطرح شده در کلاس درس اشاره کرد. لذا نمی‌توان ادعای برخی آموزشگران را –که با استناد به اینکه نتوانسته‌اند چنین رویکردی را در بازهٔ زمانی کوتاهی که در کلاس درس در اختیار دارند، پیاده کنند؛ آن را سبب سردرگمی دانش‌آموزانِ به ویژه ضعیف‌تر دیده‌اند و از اجرای آن در کلاسهای درس امتناع می‌ورزند (لیکین، ۲۰۱۱)– به تمامی انکار کرد. به ویژه اینکه استفاده از این رویکرد در آغاز، گاهی با مقاومت شدید دانش‌آموزانی مواجه می‌شود که به کاربری نگاه رویه‌ای خو گرفته‌اند و استفاده از آن را به مراتب ساده‌تر از دیگرگونه اندیشیدن می‌دانند. دانش‌آموزانی که در مواجهه با چند راه‌حل – از آن رو که با حفظ و تکرار رویه‌ها مأنوس‌ترند– با سردرگمی مواجه می‌شوند و گاهی از میانهٔ راه‌حلی، به راهی دیگر قدم می‌گذارند و آخرالامر نیز به نتیجهٔ مطلوب نمی‌رسند. اما پژوهشگران این پژوهش به استناد نتایج مطالعه و آنچه در طول یک ترم تحصیلی، به تجربه حاصل آمده است، پیامدهای مثبت استفاده از این روش را به مراتب بیش از اثرات منفی آن می‌دانند.

تجربهٔ اجرایی پژوهشگران این پژوهش، موفقیتهای استفاده از این رویکرد را، منحصر به افزایش مهارت تعمیم نمی‌دانند؛ بلکه پیامدهای مثبت دیگری مانند افزایش اعتماد به نفس دانش‌آموزان در برخورد با مسائل ریاضی، افزایش تنوع روشهای پاسخ‌گویی درست به سؤالات و تقویت مؤلفه‌های انگیزشی در آنان، از اثرات مثبت استفاده از این رویکرد است که بحث مفصل دربارهٔ آن نیازمند مجالی وسیع‌تر است.

در بررسی کیفی پاسخهای دانش‌آموزان نیز، علائمی دالّ بر برخی بیماریهای مزمن در بدنهٔ سیستم آموزشی و در نتیجه سیستم یادگیری دانش‌آموزان به چشم می‌خورد که نمی‌توان بدان بی‌اعتنا بود. این نشانه‌ها و آسیبها را می‌توان در محور عدم آشنایی کامل با مفهوم متغیر، شکاف میان تفکر حسابی و تفکر جبری و ضعف در گفتمان ریاضی خلاصه کرد.

به نظر می‌رسد به خلاف تصور موجود، که ۱۵ سالگی را سن آشنایی کامل با تفکر انتزاعی قلمداد می‌کند[1]، در پایهٔ دهم که چیزی بیش از سه سال به پایان تحصیلات عمومی دانش‌آموزان نمانده، هنوز گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری با موفقیت انجام نپذیرفته است و غالب دانش‌آموزان کماکان با مفهوم متغیر و ضرورت استفاده از آن بیگانه‌اند. به علاوه، در این مطالعه اغلب دانش‌آموزان، هرچند به فهم تعمیم نائل آمده‌اند، ولی در بیان تعمیم تنها نیمی از آنان موفق بوده‌اند. لذا نتایج این پژوهش هم‌رأی با میسن (۲۰۰۵) که فاصلهٔ میان تصور و نوشتن را در بیان تعمیم، فاصله‌ای معنادار می‌داند، مهر تأییدی است بر مطالعاتی که موفقیت در تعمیم را وابسته به درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر و لذا نیازمند به توانمندی در تفکر انتزاعی (فوجی،[2] ۲۰۰۳) می‌دانند.

همچنین نتایج این پژوهش، با پژوهشهایی همسوست که مدعی‌اند دانش‌آموزان دورهٔ متوسطهٔ اول (فوجی، ۲۰۰۳؛ لنین، ۲۰۰۵) و حتی دورهٔ متوسطهٔ دوم، اگر در شناسایی الگوها و درک روابط میان متغیرها هم موفق عمل کنند، به سبب شناخت ناکافی از مفهوم متغیر، به راحتی قادر به نوشتن قوانین و روابط به زبان نمادین جبری نیستند (میسن، ۲۰۰۵؛ ریحانی و صدیقی، ۱۳۹۲). به عبارت دیگر توانایی بیان روش یا راه‌حل به شکل شفاهی، لزوماً به معنای توانایی تشخیص نمادهای صحیح برای بازنمایی جبری آن روش نیست (کیرن، ۱۹۹۲) و در بسیاری از مواقع، مشکل دانش‌آموزان، بیان تعمیم است؛ نه شناسایی آن و آنها اغلب فاقد زبانی هستند که با آن در مورد تعمیم بحث کنند (کوپر و وارن، ۲۰۰۸).

مرور پاسخهای دانش‌آموزان به سؤالات مربوط به تعمیم دور –که در آن انتظار می‌رود پس از گذشتن از مراحل اولیهٔ تعمیم، رابطهٔ میان حداقل دو متغیر را به زبان کلام یا به زبان نمادهای جبری بیان کنند– نشان می‌دهد که همهٔ آنها در بیان شفاف آنچه در ذهن دارند و کاربرد زبان ریاضی، موفق عمل نمی‌کنند. وجود عبارات مبهم و غیر قابل درک متعدد در پاسخهای موجود و همین‌طور اعترافات مستقیم آنان مبنی بر عدم توانایی در بیان آنچه در ذهن دارند، فرضیهٔ ضعف گفتمان ریاضی را در آنان قوّت می‌بخشد. اسکوزا (۲۰۰۸) نیز تأیید می‌کند که معمولاً برای دانش‌آموزان دشوار است که آنچه را می‌فهمند در قالب واژه‌ها بریزند و معمولاً میان آنچه روی صفحهٔ کاغذ نوشته شده و آنچه منظور واقعی دانش‌آموز است، فاصله‌ای معنادار دیده می‌شود.

---

۱. پیاژه ۱۲ تا ۱۵ سالگی را به مرحلهٔ تفکر صوری و انتزاعی مرتبط می‌داند (سیف، ۱۳۸۳).

2. Fuji

سخن آخر

هدف از انجام دادن این پژوهش این بود که اثربخشی رویکرد راه‌حلهای چندگانه برای یک مسأله در تقویت تعمیم به عنوان یکی از مؤلفه‌های کلیدی تفکر ریاضی‌وار، در صحنهٔ عمل سنجیده شود و ره‌آورد این سفر، فانوسی است که امید است آویختن آن بر راه رهروانِ آموزشگر ریاضی، نوری برافروزد و پرتوی افکند. از این رو مدعای این پژوهش، نه یگانگیِ مسیر دستیابی به چنین مقصدی است و نه ارائهٔ الگویی که تبعیت گام به گام از آن، محصولی واحد را برای همگان رقم بزند؛ بلکه با استناد به اصل عدم قطعیت و منحصر به‌فردی موقعیتهای گوناگون کلاس درس و با دقت‌نظر به پیچیدگیها و ظرافتهای رفتارهای انسانی، هم‌آوا با کسانی است که تلاش برای به‌کارگیری مجموعه‌ای از قواعد را، با روح تدریس در تضاد دانسته‌اند و معتقدند تدریس، کنشی میان انسانی، پیچیده و هنرمندانه است که تن به قالب تکنیک نخواهد داد (گیلبرت هایت[1]، ویلیام جیمز[2]، ای پال تورنس[3] و هانتر[4]، به نقل از مهرمحمدی و عابدی، ۱۳۸۰؛ آیزنر[5]، ۱۹۹۴). لذا این پژوهش، با ارائهٔ چارچوبی پیشنهادی، و نه تجویزی شأنیت معلمان را در قضاوت فکورانه، نقادانه و هشیارانه نسبت به استفاده یا عدم استفاده از یافته‌های این پژوهش به رسمیت می‌شناسد و بر آن است که می‌توان همراه با شونفلد (۱۹۹۲) ریاضیات را مقوله‌ای زنده و پویا دانست و در راستای اول جستجوی[6] راه‌حلها و نه فقط حفظ رویه‌ها، دوم کنکاش الگوها و نه صرفاً به خاطرسپاری فرمولها و نهایتاً تدوین و سازمان‌دهی حدسیه‌ها و نه فقط انجام دادن تمرینها تلاشی دوباره و هماره را از سر گرفت.

1. Gilbert Highet
2. William James
3. E. Paul Torrance
4. Hunter
5. Eisner
6. Seeking

منابع

باقری، خسرو. (۱۳۹۰). *درآمدی بر فلسفه تعلیم و تربیت جمهوری اسلامی ایران، جلد دوم*. تهران: نشر علمی و فرهنگی.

برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران. (۱۳۹۱). تهران: شورای عالی آموزش و پرورش، وزارت آموزش و پرورش و سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

پولیا، جورج. (۱۹۴۵). *چگونه مسأله را حل کنیم*، (ترجمه آرام، احمد، ۱۳۷۷). تهران: نشر کیهان.

__________ (۱۹۶۹). اهداف آموزش ریاضی، (ترجمه علیرضا طالب‌زاده و زهرا گویا، ۱۳۸۲). *رشد آموزش ریاضی*، (۷۲)، ۳۵-۴۱.

ریحانی، ابراهیم و صدیقی، مریم. (۱۳۹۲). بررسی عملکرد دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری. *نشریه علمی- پژوهشی فناوری آموزش*، ۷(۳)، ۲۰۵-۲۲۰.

سیف، علی‌اکبر. (۱۳۸۳). *روان‌شناسی پرورشی (روان‌شناسی یادگیری و آموزش)*، ویرایش ششم. تهران: آگاه.

شجاعی، کورش. (۱۳۹۱). *بررسی تعمیم و توجیه دانش‌آموزان سال اول متوسطه در باب الگوهای عددی و هندسی خطی*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

صدیقی، مریم. (۱۳۸۷). *بررسی مهارت تعمیم جبری در دانش‌آموزان دختر سال اول متوسطه*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

کریمی، عبدالعظیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز و کبیری، مسعود. (۱۳۹۱). *گزارش اجمالی از مهم‌ترین نتایج تیمز و پرلز ۲۰۱۱ و مقایسه آن با عملکرد دانش‌آموزان ایران در دوره‌های قبل*. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، مرکز مطالعات تیمز و پرلز.

کمیته مطالعه یادگیری ریاضی. (۱۳۸۷). *کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند*، (ترجمه مهدی بهزاد و زهرا گویا). تهران: نشر فاطمی.

مهرمحمدی، محمود و عابدی، لطفعلی. (۱۳۸۰). ماهیت تدریس و ابعاد زیبا شناختی آن. *فصلنامه مدرس*، ۵(۳)، ۴۳-۵۷.

Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM*, *40*(1), 1.

Cai, J. (2002). Assessing and understanding U.S. and Chinese students’ mathematical thinking: Some insights from cross-national studies, *ZDM*, *34*(6), 278-290.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students’ ability to generalize. *ZDM*, *40*(1), 23-37.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Eisner, W. E. (1994). *The educational imagination: On the design and evaluation of school programs* (2nd ed.). New York: Macmillan.

Freudenthal, H. (2006). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Boston, London: Springer Science & Business Media.

Fuji, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. (Vol. 1). In Pateman, N.A., Dougherty, B.J., & Zilliox, J.T. (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Conference held jointly with the 25th PME-NA Conference 1. Honolulu, Hawaii: PME. S. 49-65.

Harries, T. (2001). Working through complexity: An experience of developing mathematical thinking through the use of Logo with low attaining pupils. *Support for Learning*, *16*(1), 23-27.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92.

Kemmis, S., McTaggart, R., & Retallick, J. (Eds.) (2004). *The action research planner* (2nd ed. rev.). Karachi: Aga Khan University, Institute for Educational Development.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

__________ (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cain & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-593). Springer Berlin Heidelberg.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Leikin, R. (2011). Multiple-solution tasks: From a teacher education course to teacher practice. *ZDM Mathematics Education*, *43*(6), 993-1006.

__________ (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, 55*(4), 385-400.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. *Proceedings of CERME 6* (pp. 776-785), January 28th-February 1st 2009, Lyon France, INRP 2010.

__________ (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73-90.

Lynch, K.H., & Star, J.R. (2014). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in Algebra I: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:10989382

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. N. Bednarz, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

__________ (2005). *Developing thinking in algebra*. P.C.P (Paul Chapman Publishing), London: Sage.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). England: Pearson Education Limited.

McDougall, D., & Karadag, Z. (2008). Tracking students' mathematical thinking online: Frame analysis method. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

National Governors Association Center for Best Practices (NGA Center) & the Council of Chief State School Officers (CCSSO) (2010). *Common core state standards for mathematics*. Available at http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

National Research Council (NRC) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: The National Academies Press. doi:https://doi.org/10.17226/9822.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM*, *43*(2), 257-267.

Pound, L. (2008). *Thinking and learning about mathematics in the early years.* London, New York: Routledge.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

__________ (2014). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer Science & Business Media.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 497-533.

Scusa, T. (2008). *Five processes of mathematical thinking*. Summative Projects for MA Degree, University of Nebraska-Lincoln.

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*? In Progress report of the APEC project: "Collaborative Studies on Innovations for Teaching and

Learning Mathematics in Different Cultures (II) – Lesson Study focusing on Mathematical Thinking -", Tokyo: CRICED, University of Tsukuba.

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565-579.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tanişli, D., & Özdaş, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *9*(3), 1485-1497.

Vogel, R. (2005). Patterns-a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM*, *37*(5), 445-449.

Warner, L. B., Schorr, R. Y., & Davis, G. E. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation. *ZDM*, *41*(5), 663-679.

Watson, A. (2001). Instances of mathematical thinking among low attaining students in an ordinary secondary classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 461-475.

Watson, A., Houssart, J., & Roaf, C. (Eds.). (2012). *Supporting mathematical thinking*. London: David Fulton.

Wu, H.-H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(3), 221-237.

Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2010). Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 1142-1147.

Zapatera, A., & Callejo, M. L. (2013). Preservice primary teachers' noticing of students' generalization process. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 425-432). Kiel, Germany, PME.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131-141.