بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد

دکتر ابراهیم ریحانی*

زهرا شریفی**

محمد سلطانی***

چکیده

مفهوم حد یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال است. این مفهوم به سبب پیش نیاز بودن برای مفاهیمی همچون پیوستگی، مشتق، انتگرال و سریها، از اهمیتی ویژه در ریاضیات برخوردار است. پژوهش حاضر[1] که به روش کیفی انجام شده است، به بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد در شهرستان قوچان پرداخته است. جامعه آماری این تحقیق دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته ریاضی و تجربی این شهر بوده است. نمونه ۱۰۸ نفری این پژوهش، شامل ۷۴ پسر و ۳۴ دختر، به شیوه تصادفی خوشه‌ای تک مرحله‌ای انتخاب شده است. ابزار گردآوری اطلاعات پرسشنامه ای محقق ساخته است که 11 سؤال از مبحث حد را دربرمی‌گیرد. باتوجه به آلفای کرونباخ ۰/۷۹۲ به‌دست آمده، پایایی سؤالات مورد تأیید بوده است. نتایج حاصل از این تحقیق نمایندگر درک ناقص دانش‌آموزان از مفهوم حد و پیوستگی است. تعبیر حد تابع به مثابه یک مرز، عدم تمایز میان مقدار تابع و حد آن، الزامی دانستن وجود مقدار تابع برای وجود حد آن در یک نقطه، درک نادرست از زبان و اصطلاحات به کاررفته برای تعریف حد، عدم درک مفهوم بی‌نهایت و ناتوانی در تفسیر حد تابع به کمک نمودار آن از مشکلات و بدفهمی‌های دانش آموزان در درک مفهوم حد است. برخی دیگر از مشکلات هم به درک مفاهیم دیگری مانند تابع برمی‌گردد. مثلاً عدم درک مفهوم تابع و ناتوانی در ارتباط میان بازنماییهای گوناگون یک تابع، از عوامل مؤثر بر درک دانش‌آموزان از مفهوم حد است. به طور خلاصه می‌توان گفت که درک دانش آموزان از مفهوم حد متکی بر تصور مفهومی آنان است. همچنین دانش‌آموزان در این تحقیق نشان می‌دهند که درک آنها از مفهوم حد، محدود به دستورات و روشها و الگوریتمهایی است که به آنها آموزش داده شده است.

کلید واژگان: تابع، بدفهمی، حد، دانش‌آموزان، سوم متوسطه، آموزش ریاضی

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۱/۱۱   تاریخ پذیرش: ۹۵/۵/۲۳

* دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی (نویسنده مسئول) e_reyhani@yahoo.com

** دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی zahra_sharifi1111@yahoo.com

*** کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی soltanim60@yahoo.com

۱. این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق قرارداد شماره ۱۹۰۹۴ در سال ۱۳۹۵ انجام گردیده است.

مقدمه

درک مفاهیم ریاضی در افراد، همواره با اشتباهاتی همراه بوده است که برخی از آنها ممکن است صرفاً به سبب عدم تمرکز، شتابزدگی در استدلال، اشتباه در حافظه یا خطا در توجه به ویژگیهای خاص مسئله باشد. یا ممکن است اصلاً ناشی از اشتباه نباشد، بلکه حاصل تفسیرهای متفاوت مسئله باشد. برخی دیگر از اشتباهات نیز ممکن است نشانه درک نادرست و غلط از مفهوم باشد که این اشتباهات حاصل بی‌دقتی و عدم تمرکز نیست، بلکه خطاهایی هستند که کاملاً نظام‌مندند و تصادفی به وجود نمی‌آیند. این خطاها را بدفهمی[۱] می‌نامند.

بدفهمی از نظر آلن[۲](۲۰۰۷)، فکر، تصور یا دید اشتباه است که از درک غلط چیزی ناشی می‌شود. به عبارت دیگر ممکن است روابط شکل گرفته در ذهن فرد دربارهٔ یک مفهوم کاملاً نامناسب باشد و صحت علمی نداشته باشد. برداشتها و تصورات نادرست ذهنی دربارهٔ یک مفهوم ریاضی ممکن است از طریق تجربیاتی که فرد با قرار گرفتن در موقعیتهای متفاوت و در زمانهای مختلف کسب کرده است، به وجود آمده و شکل گرفته باشد، از این رو، نه آنی به وجود می‌آیند و نه به سرعت کنار گذاشته می‌شوند. پس باید آموزش و یادگیری مفاهیم ریاضی به گونه‌ای باشد که به دانش‌آموزان کمک کند تصورات مفهومی[۳] خود را هم‌زمان با تشریح معنای مفاهیم به کار رفته در آن شکل دهند. زیرا تصورات مفهومی ناصحیح را به دشواری می‌توان به یک تصور صحیح تبدیل کرد، به‌ویژه زمانی که به شکل منسجم و یکپارچه در ذهن و اندیشه دانش‌آموزان ایجاد شده باشد (ویلیامز[۴]، ۱۹۹۱).

اصطلاح تصور مفهومی را تال[5] و وینر[۶] (۱۹۸۱) برای توصیف کلی ساختارهای شناختی که با مفهوم ارتباط دارند، معرفی کردند و شامل تصاویر ذهنی و خواص و فرآیندهای وابسته اند که ممکن است در طول سالها از طریق انواع تجربه ساخته شده و قابل تغییر باشند (محتشم،۱۳۹۳). این اصطلاح در مقابل تعریف مفهوم[۷] قرار دارد که با تصور مفهومی کاملاً متفاوت است. تعریف مفهومی به صورت شکلی از کلمات است که آن مفهوم را مشخص می‌کند. این تعریف می‌تواند رسمی و بر اساس یک نظریه ریاضی و منطبق بر آن باشد یا حتی شخصی بوده و از سوی خود

1. Misconception
2. Allen
3. Concept image
4. Williams
5. Tall
6.Vinner
7. Concept definition

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

شخص برای توصیف ذهنی از آن مفهوم ابداع شده باشد. مثلاً "تعریف مفهوم" یک تابع ممکن است این طور باشد که «یک رابطه میان دو مجموعه A و B که در آن هر عضو A دقیقاً به یک عضو از B نسبت داده می‌شود». افرادی که با تابع کار می‌کنند ممکن است تعریف تابع را به یاد بیاورند یا به یاد نیاورند، اما "تصور مفهوم" به هر حال ممکن است جنبه‌های دیگری را نیز در برگیرد. مثلاً، این ایده که تابع به وسیله یک قاعده یا یک ضابطه مشخص می‌شود و اینکه چندین فرمول متفاوت ممکن است در بخشهای مختلف دامنه استفاده شوند؛ یا اینکه یک تابع به عنوان یک عمل که عنصر a درA را به عنصر f(a) در B را می‌نگارد، یا تابع به عنوان یک نمودار یا به عنوان جدولی از مقادیر در نظر گرفته شود. تمام اینها امکان حضور در تصور مفهوم افراد را دارند یا حتی ممکن است هیچ‌یک در تصور مفهوم افراد قرار نگیرند(تال و وینر، ۱۹۸۱). بدفهمی‌ها زمانی ایجاد می‌شوند که میان تعریف مفهومی و تصور مفهومی صحیح از یک طرف و تصورات شخصی و توصیفات ذهنی فرد از طرف دیگر، سازگاری وجود نداشته باشد.

مفهوم حد یک تابع از مفاهیم ریاضی است که دانش‌آموزان در درک و فهم آن با بدفهمی‌های بسیار روبه‌رو هستند. حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی ریاضیات است که پایه بسیاری از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به شمار می‌آید و به بسیاری از مفاهیم دیگر مانند بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک و همگرایی مرتبط می‌شود. در ریاضیات دبیرستان معمولاً از حد برای بیان رفتار یک تابع، سری یا دنباله‌ای از اعداد استفاده شده و به بررسی رفتار این تابع در نقاط روی صفحه و یا در بی‌نهایت پرداخته می‌شود. حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال و در آنالیز ریاضی برای تعریف مشتق، انتگرال و مفهوم پیوستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد (ریحانی، بخشعلی‌زاده و نظری، ۱۳۹۲).

به دلیل ارتباط مفهومی حد با سایر مفاهیم ریاضی، آموزش و یادگیری آن از اهمیتی ویژه برخوردار است. در آموزش این مفهوم باید از روشهایی استفاده شود که در آن تصورات نادرست دانش‌آموزان به حداقل برسد. آگاهی معلمان از باورهای نادرست دانش‌آموزان در مورد این مفهوم و اتخاذ روشهای مناسب برای اصلاح بدفهمی‌های دانش‌آموزان، نقشی اساسی در ارتقای آموزش خواهد داشت. هدف این پژوهش، تشخیص، توصیف، تبیین و دسته‌بندی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این زمینه است. سؤالاتی که تحقیق حاضر را هدایت می‌کنند عبارت اند از:

۱. دانش‌آموزان سال سوم متوسطه چه درکی از مفهوم حد دارند؟
۲. بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد چیست؟

مبانی نظری تحقیق

بسیاری از دانش‌آموزان با مفهوم حد مشکل دارند و اساس جهان‌بینی ریاضی آنان این است که ریاضیات مجموعه‌ای از فرمولها و محاسبات پیچیده است که با دنیای واقعیت و فعالیتهای روزمره ارتباط ندارند، از این رو ملموس و قابل درک نیستند و فقط عده ای خاص توانایی درک آنها را دارند. برخی از معلمان از ابتدای کار و بدون مقدمه با هدایت دانش‌آموزان به سمت استفاده از نمادها و رویه‌های پیداکردن مقدار حد، آنها را از درک درست مفهوم حد دور می‌کنند. دانش‌آموزان نیز معمولاً توانایی محاسبهٔ حدها را با به‌کارگیری الگوریتمی فرمولها و رویه‌ها دارند، بدون اینکه قادر به تفسیر نتایج کار خود باشند. بیشتر دانش‌آموزان ممکن است با تمرکز بر روشهای جبری و الگوریتمی برای محاسبه، بتوانند مسائل معمولی را حل کنند ولی برای حل مسائل غیر معمول و نامتعارف که نیازمند درک ویژگیهایی خاص از مفهوم حد باشد ناتوان هستند (جوتر[1]،۲۰۰۶). تجربه تدریس نگارندگان مقاله در مدرسه و دانشگاه نیز نشان می‌دهد که با وجود توانایی فراگیران در انجام دادن محاسبات پیچیدهٔ حد، درک آنها از این مفهوم سطحی و ناقص است.

همان‌طور که اشاره شد، عدم درک صحیح دانش‌آموزان از مفهوم حد منجر به بروز بدفهمی‌های بسیار در این زمینه می‌شود که ممکن است درک دیگر مفاهیم مرتبط با حد را نیز دچار مشکل کند. جهت شناسایی این بدفهمی‌ها تحقیقات بسیار انجام گرفته است که هر کدام نوعی بدفهمی را معرفی می‌کند یا بر بدفهمی‌هایی که دیگران شناسایی کرده اند صحه می‌گذارد. در این بخش ابتدا بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد را بیان می‌کنیم، سپس به بررسی عوامل مؤثر در ایجاد این بدفهمی‌ها خواهیم پرداخت.

۱. بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد

بدفهمی‌های شناسایی شده در این زمینه در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. انواع بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد (برگرفته از سلطانی، ۱۳۹۱)

شماره	نوع بدفهمی	تشریح بدفهمی	پژوهشهای حمایت کننده
۱	**حد و مرز[2]**	به تصور دانش‌آموزان حد تابع به واقع مرز و سر حد تابع است و تابع هرگز نمی‌تواند از آن مقدار فراتر رود. یعنی مثلاً زمانی که حد تابع ۲ است، مقدار تابع از مقدار ۲ بیشتر نخواهد شد.	ویلیامز(۱۹۹۱)، جوردان[3](۲۰۰۵).

1. Juter
2. Does not exceed
3. Jordaan

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

۲	**حد و نماد**	پنداشتهای نادرستی که از نمادها و اصطلاحات زیادی که برای بیان تعاریف حد به کار می‌رود مانند: میل کردن به سمتِ . . . و نزدیک می‌شود به . . .، ایجاد می‌شود. زمانی که مثلاً به دانش‌آموز گفته می‌شود x نزدیک a می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد، در پی آن بدفهمی‌هایی ایجاد خواهد شد که به نماد $x \longrightarrow a$ مربوط است.	دیویس[1] و وینر (۱۹۸۶)، کارنو[2](۱۹۹۱)
۳	**حد و حرکت**[3]	برخی تصور می‌کنند زمانی که متغیر یک تابع به یک مقدار نزدیک می‌شود، حد حرکت تابع را به سمت یک عدد توصیف می‌کند، پس حد به مفهوم حرکت گره خورده است. این اتفاق در زمان پرکردن جدولهایی رخ می‌دهد که برای آموزش حد در ابتدای یادگیری، دانش‌آموز با آن مواجه می‌شود.	ویلیامز(۱۹۹۱) به نقل از گوچلر[4] (۲۰۱۳)، کارنو(۱۹۹۱)
۴	**حد و جایگزینی**	برخی تصور می‌کنند که یک تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد یا حد تابع در یک نقطه همواره با مقدار تابع در آن نقطه برابر است یا حتی برخی آن را با مفهوم پیوستگی مرتبط دانسته و معتقدند که تابع فقط می‌تواند در نقاطی که پیوسته باشد حد داشته باشد.	جوردان(۲۰۰۵)
۵	**حد و بی‌نهایت**[5]	برخی تصورات مربوط به مفهوم بی‌نهایت و فرآیندهای نامتناهی است. چون دانش‌آموزان قادر به فهم فرآیندهای نامحدود نیستند و فقط از فرآیندهای معین و محدود برای حل مسائل مربوط به حد استفاده می‌کنند. مثلاً در محاسبهٔ حدهای بی‌نهایت، دانش‌آموز چون درک خوبی از بی‌نهایت ندارد مانند عدد با آن برخورد کرده و در تابع به‌عنوان عدد آن را جایگزین می‌کند.	کوتریل[6] و همکاران (۱۹۹۶)
۶	**حدِ غیر قابل دسترسی**[7]	برخی تصور می‌کنند حد عددی یا نقطه‌ای است که تابع نزدیک آن می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد. مثلاً زمانی که حد تابعی در یک نقطه عدد ۵ به‌دست می‌آید، تصور می‌کنند هرگز نمی‌توان آن را برابر ۵ در نظر گرفت بلکه عددی نزدیک ۵ است.	تال و شوارزنبرگر[8] (۱۹۷۸)، کارنو(۱۹۹۱)، ویلیامز(۱۹۹۱)، به نقل از گوچلر (۲۰۱۳)، جوتر(۲۰۰۶)

۲. عوامل مؤثر بر ایجاد بدفهمی‌ها

تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است نشان می‌دهد که عوامل متعددی در ایجاد این بدفهمی‌ها دخیل اند و این عوامل مانع ساخت و سازهای مفهومی در مورد حد می‌شوند. از موانع شناخته شده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

1. Davis
2. Cornu
3. Motion of the function
4. Güçler
5. Approaches infinitely without reaching
6. Cottrill
7. Approaches but it never gets to touch or exceed
8. Tall & Schwarzenberger

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

الف) مشکلات ناشی از طرحواره‌ها[1]

اغلب اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان ریشه در ساختارهای ذهنی آنها دارد. این ساختارهای ذهنی یا به عبارت دیگر طرحواره‌های ذهنی عاملی مؤثر در ایجاد بدفهمی‌ها در مورد مفهوم حد هستند. گویا و حسام(۱۳۸۴) چند نوع از تأثیرات طرحواره‌های ذهنی دانش‌آموزان را به شکل زیر بیان کرده‌اند:

الف-۱. مداخله طرحواره‌های پیشین در یادگیری جدید: همواره طرحواره‌های قبلی دانش‌آموزان که در ذهن آنها شکل گرفته ممکن است یادگیری آنها را تحت تأثیر قرار دهد. اولیور[2](۱۹۹۲) معتقد است دانش‌آموزان به جای آنکه طرحواره‌های ذهنی خود را بازسازی کنند، عموماً تمایل دارند ایده‌های جدید را در طرحواره‌های موجود خود جذب کنند و با آنها منطبق سازند. مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ را زمانی که $x \to +\infty$ برابر ۶ محاسبه می‌کند، طرحوارهٔ ذهنی او از حد در نقطه $x=3$ در حل این مسئله مداخله کرده و باعث ایجاد این اشتباه شده است.

الف-۲. مداخله یادگیری جدید در طرحواره‌های قبلی: در این حالت دانش‌آموز با یادگیری مطالب جدید، دچار بدفهمی‌ها و اشتباهاتی در مورد مطالب گذشته می‌شود که پیش از آن، آنها را نداشته است، یعنی در این حالت طرحوارهٔ جدید است که طرحوارهٔ پیشین را تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً دانش‌آموزی که قبل از آموزش "حد در بی‌نهایت"، محاسبه حد توابع گویا در یک نقطه را عددی ثابت محاسبه می‌کند، پس از آموزش حد در بی‌نهایت در مورد حدهایی که به جواب $\pm\infty$ می‌رسند، دچار تناقض می‌شود. در این زمان طرحوارهٔ جدید است که طرحوارهٔ قبلی را دچار مشکل می‌کند.

الف-۳. بازخوانی یک طرحوارهٔ نامناسب: زمانی که دانش‌آموز در موقعیت حل مسئله قرار می‌گیرد، باید طرحواره‌هایی را در ذهن خود بازخوانی و فعال کند که به کارگیری آنها برای حل مسئله مفید باشد. گاهی ممکن است دانش‌آموز برای حل مسئله ای از طرحوارهٔ نامناسب استفاده کند و سبب بروز یک اشتباه مفهومی شود. مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-25}$ را در نقطه ۵ برابر ۱ محاسبه می‌کند، ممکن است طرحواره حدهای بی‌نهایت را به طور نامناسب بازخوانی کرده باشد.

1. Schema
2. Olivier

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

ب) مشکلات ناشی از روشهای آموزشی غیرمؤثر

یکی از عوامل تأثیر گذار بر عدم یادگیری و درک ناصحیح مفهوم حد نحوهٔ آموزش این مفهوم و تأکید نامناسب و بیش از اندازه بر دانش رویه‌ای، به جای فراهم ساختن تعادل و توازن میان دانش مفهومی و دانش رویه ای در کتابهای درسی و توجه بیشتر معلمان بر دانش رویه ای در بحثهای کلاسی و ارزشیابی تحصیلی است. طیف وسیعی از دانش‌آموزان وجود دارند که ضمن تسلط کامل بر روشهای الگوریتمی و جبری که با بازنماییهای دیگر مفهوم مثل گرافیکی و هندسی سازگاری ندارد، بیشتر مفاهیم را بدون درک مفهومی آن می آموزند. بنابر نتایج به‌دست آمده از تحقیقات برای آموزش مفاهیم به دانش‌آموزان باید میان رویه‌های الگوریتمی و درک مفهومی تعادل ایجادکرد تا معنای مفاهیم مثلاً مفهوم حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال با به‌کارگیری روشهای الگوریتمی قدرتمند پوشیده نشود [آرتیگو[1] (۱۹۹۸) و بروسو[2] (۱۹۹۷)، به نقل از ایلیا[3] و همکاران(۲۰۰۹)] .

ج) مشکلات ناشی از فرآیندهای انتزاعی و ساختن مفهوم

معمولاً نخستین برخورد دانش‌آموزان با مفهوم حد، با مسائلی شروع می‌شود که بر تعاریف تکیه نمی‌کند، بلکه بر خواص متنوع شهودی مفهوم حد تکیه دارد. با چنین شروعی اغلب دانش‌آموزان تصوراتی از پویایی حد پیدا می‌کنند و به این باور می‌رسند که تعاریف حد را بدون نیاز به دستیابی به همه نتایج مفهومی رسمی حد درک کرده‌اند. همچنین تأکید بر فرآیندهای انتزاعی مانند «نزدیک شدن به ...» که در آموزش اولیه حد وجود دارد سبب ایجاد تصاویر ذهنی از حد می‌شود که با تعاریف رسمی از حد سازگاری ندارد و توسعه این تصاویر از حد و بی‌نهایت سبب ایجاد بدفهمی‌ها می‌شود.

د) مشکلات به وجود آمده در برخورد با تعریف رسمی حد

مشکل اساسی در مفهوم حد زمانی به اوج خود می‌رسد که دانش‌آموزان باید از مفاهیم پویایی حد بگذرند و به مفاهیم رسمی برسند. همانطور که می‌دانیم در آموزش مفهوم حد نخست جملاتی مانند « میل می‌کند به سمتِ ...» و «نزدیک می‌شود به ...» و مانند آن برای دانش‌آموزان معنی می‌شود. دانش‌آموزان حتی بعد از آموزش رسمی حد، هنوز هم بر همان معانی اولیه تکیه می‌کنند و بدفهمی‌هایی مانند «آیا تابع به حد خود می‌رسد؟» یا «حد، حرکتی است به

1. Artigu
2. Broussea
3. Elia

سمت یک شیء که ممکن است به آن برسد یا نرسد» برای آنها ایجاد می‌شود. این بدفهمی‌ها در درک دانش‌آموزان از تعریف رسمی حد مؤثر است. بنابراین مطرح شدن تعاریف رسمی که با ایده‌های شهودی و پویایی از حد سازگاری ندارد سبب می‌شود دانش‌آموزان در درک آن دچار مشکل شوند و به بدفهمی‌های آنها نمادها و اصطلاحات موجود در تعریف رسمی هم اضافه می‌شود (ایلیا و همکاران، ۲۰۰۹).

پیشینه تحقیق

به سبب اهمیت و جایگاه مفهوم حد در ریاضیات و مشکلات دانش‌آموزان در این زمینه، تحقیقات متعدد در سراسر دنیا در مورد این مفهوم انجام گرفته است که بخشی از آنها به نحوه آموزش این مفهوم و بخشی دیگر از تحقیقات به شناسایی انواع مشکلات و بدفهمی‌های ایجاد شده می‌پردازد. از میان این تحقیقات می‌توان به تحقیق موناقان[1] (۱۹۹۱) اشاره کرد که تأثیرات زبان را بر باورهای دانش‌آموزان دربارهٔ واژه‌هایی مانند «به سمتِ......میل می‌کند.»، «بهِ......نزدیک می‌شود.»، «در......همگرا می‌گردد.» و «حد» بررسی نمود و مشاهده کرد که دانش‌آموزان این واژه‌ها را به شکلهای متفاوت به کار می‌برند.

کارنو (۱۹۹۱) نیز در تحقیقی به بررسی بدفهمی‌ها در ذهن دانش‌آموزان پرداخت. برخی از بدفهمی‌های که کارنو به آن پی برده است عبارت اند از: "حد غیر قابل دسترسی است."، " حد مرز است." و " حد متحرک است.". او آنها را مدلهای خود انگیخته[2] نامید و بیان کرد مدل "حد غیر قابل دسترس است" و "حد مرز است"، هر دو مغایر با تعاریف رسمی حد و نتیجه درک نادرست مفهوم حد است، اما مفهوم حد به عنوان «حرکت»، گرچه مدل دقیقی نیست و ممکن است بر درک دانش‌آموزان از تعریف رسمی تأثیر منفی بگذارد ولی می‌تواند مدلی معقول و مفید باشد.

زیدلیک[3] (۲۰۰۰) در مطالعه‌ای نشان داد که دانش‌آموزان در منشأ تفکرات و باورهایشان در ریاضیات به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول، دانش‌آموزانی که ریاضی را مجموعه‌ای از حقایق و رویه‌ها برای حفظ کردن و به کار گرفتن به شمار می آورند و ادعا می‌کنند که ریاضی غیر قابل درک است و ارزشی برای قضیه‌هایی که با این حقایق اثبات می‌شوند قائل نیستند. این گروه را نمی‌توان با استدلالهای ریاضی یا مثالهای نقض متقاعد کرد، زیرا استدلالهای ریاضی اغلب ریشه در

1. Monaghan
2. Spontaneous
3. Szydlik

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

تعاریف دقیقی دارند که مجموعه‌ای از معیارهای مشخص هستند. این دسته از دانش‌آموزان اغلب نمی‌توانند تعریفی منسجم از تابع یا حد ارائه کنند و حتی نمی‌دانند چرا از برخی از این رویه‌ها و فرمولها برای مسائل حد استفاده می‌کنند. بدفهمی‌هایی که در این گروه از دانش‌آموزان در مورد مفهوم حد ایجاد می‌شود، غیر قابل دسترس بودن و مرز بودن حد است.

دسته دوم دانش‌آموزانی که ریاضی را منطقی و سازگار قلمداد می‌کنند. این ویژگی برای آنها امکان دستیابی به تعاریف رسمی، قدرت حل مسائل حد و تصاویر مفهومی بدون تناقض را فراهم می‌سازد. دانش‌آموزانی با این باور تعاریف منسجم‌تری از حد ارائه می‌کنند و احتمال بیشتری دارد باورهایی از متحرک نبودن حد داشته باشند.

جوتر (۲۰۰۶) نیز در مطالعه‌ای، عملکرد دانشجویان سوئدی در حل مسائل مربوط به حد را بررسی کرده است. این مطالعه روی دانشجویانی انجام شده است که درس حساب دیفرانسیل را می‌گذراندند. یافته‌ها حکایت از آن دارد که تصور مفهومی آنان از مفاهیم حساب دیفرانسیل، روی حل مسئله آنها تأثیر گذاشته است. تصور مفهومی آنان از حد، نشان از سردرگمی آنها در مورد ویژگیهای متفاوت مفهوم حد دارد. یکی دیگر از اهداف این تحقیق بررسی رابطه میان نگرش دانشجویان به ریاضیات و توانایی آنها در حل مسائل مربوط به حد بوده است. نتایج نشان می‌دهد که دانشجویانی که نگرش مثبت به ریاضی دارند، در حل مسائل حد بهتر عمل می‌کنند. همچنین بسیاری از دانشجویان، دانش کافی در مورد حدها برای حل و توضیح راه حلهای غیر استاندارد مسائل ندارند زیرا برخی از آنان پاسخهای صحیح را از طریق استدلال اشتباه به‌دست آورده‌اند.

جوردان (۲۰۰۵) در مورد این‌که دانش‌آموزان چگونه مفهوم حد را درک می‌کنند و چه نوع تصورات غلطی از مفهوم حد دارند پژوهش کمی - کیفی روی دانش‌آموزان سال سوم متوسطه انجام داد که یافته‌های او به‌صورت زیر است :

- مشاهده شد که دانش‌آموزان حد را به عنوان یک مقدار غیر قابل دسترس می‌دانند و این ممکن است به دلیل زبان مورد استفاده در بسیاری از کتابهای درسی برای توصیف حد باشد.
- بسیاری از دانش‌آموزان فکر می‌کنند که یک تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه دارای حد باشد.
- بعضی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند که تابع فقط در نقاط پیوستگی می‌تواند دارای حد باشد و در نقاط ناپیوسته حد ندارد.

- برخی از دانش آموزان فکر می‌کنند که حد تابع در یک نقطه ، همیشه برابر با مقدار تابع در آن نقطه است.
- همچنین برخی از دانش آموزان تصور می‌کنند که حد ، یک نقطه مرزی است .

با توجه به نتایج به‌دست آمده از تحقیقات، عوامل تأثیرگذار متعددی در بروز این بدفهمی‌ها دخالت داشته است. با توجه به اهمیت ویژه مفهوم حد، لازم است در زمینه شناخت و درمان بدفهمی‌های احتمالی گامهای حساب شده و محکم‌تر برداشته شود. با وجود پژوهشهای انجام شده در جهان، جای خالی تحقیقی مشابه در ایران به‌وضوح مشهود است. پژوهش حاضر قصد دارد بخشی از وضعیت موجود را به تصویر بکشد و نقطه شروعی برای مطالعه در این زمینه در کشورمان باشد.

روش تحقیق

در تحقیق حاضر به بررسی و شرح چگونگی و توصیف نوع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد مفهوم حد پرداخته‌ایم. این تحقیق را از نظر هدف می‌توان تحقیقی کاربردی و از نظر اجرا توصیفی–پیمایشی به شمار آورد. به عبارت دیگر این پژوهش به توصیف شرایط و وضعیت فعلی می‌پردازد. بنابراین مناسب‌ترین روش برای انجام دادن این تحقیق، روش توصیفی بوده است. نمونه مورد مطالعه ۱۰۸ نفر (۷۴ پسر و ۳۴ دختر) از دانش‌آموزان پایه سوم تجربی و ریاضی شهرستان قوچان بودند که به شیوه تصادفی تک مرحله‌ای انتخاب شده‌اند.

فرآیند تحقیق

ابزار گردآوری اطلاعات پرسشنامه که نخست ۵۱ پرسش داشته و با استفاده از منابع و مقالات مرتبط، کتابهای حسابان و ریاضی سوم متوسطه و با تکیه بر تجربه تدریس حسابان در سطح دبیرستان تهیه شده بود. در این مرحله مولفان با بحث و بررسی ۱۷ سؤال را کنار گذاشتند. در مرحله دوم پنج تن از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی ایران که سه تن از آنها از مؤلفان کتابهای درسی ریاضی دبیرستان هستند، سؤالها را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار دادند. همچنین از تجربیات آموزشی شش تن از دبیران مجرب ریاضی شهرستان قوچان(۴ مرد و ۲ زن) بهره‌گیری شده است که همگی بیش از ۲۰سال سابقه تدریس درس حسابان داشته اند. برای بهره‌گیری بیشتر از نقطه نظرات دبیران ریاضی، نخست به صورت انفرادی با آنها در مورد چارچوب تحقیق، هدف آن، آزمون مقدماتی و ویژگیهای دیگر پژوهش حاضر مذاکره شد، پس از آن در جلسات گروههای آموزشی به‌صورت گروهی، برخی از سؤالات آزمون مقدماتی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

به این ترتیب ۱۶ سؤال دیگر حذف شد و با انجام دادن اصلاحات لازم آزمونی شامل ۱۸ سؤال طراحی شد. این آزمون با شرکت ۲۰ دانش آموز در یکی از دبیرستانهای قوچان که خارج از نمونه اصلی بودند، اجرا شد.

برای نشان دادن پایایی و قابلیت اعتماد ابزار گردآوری داده‌ها، از ضریب آلفای کرونباخ و خی‌دو استفاده شده است. این روش برای محاسبه هماهنگی درونی ابزار اندازه‌گیری پرسشنامه‌ها یا آزمونهایی که ویژگیهای مختلف را اندازه‌گیری می‌کنند، به‌کار می‌رود. ابتدا پاسخهای دانش‌آموزان کدگذاری شد. به منظور کدگذاری پاسخهای دانش‌آموزان، چون سؤالات آزمون تشریحی بود ابتدا به سؤالات نمرات بین ۰ تا ۳ داده شد و کدهای ۱ و ۰ برای سؤالات اتتخاب گردید. نهایتاً به کمک نرم افزار SPSS میزان آلفای کرونباخ محاسبه شد که مقدار آن عدد ۰/۶۸ به دست آمد که از نظر متخصصان روشهای تحقیق، آزمون از پایایی قابل قبولی برخوردار نبود. لذا با تجزیه و تحلیل جداول شاخصهای پراکندگی و ضریب دشواری و ضریب تمییز، تعدادی از سؤالات به کمک نرم افزار SPSS حذف و تعداد ۱۱ سؤال برای سؤالات آزمون نهایی انتخاب گردید. مجدداً برای این سؤالات نیز ضریب دشواری و تمیز و آلفای مربوط محاسبه شد که با توجه به جدول ۲ و ۳ منجر به افزایش آلفای کرونباخ از ۰,۶۸۷ به ۰,۷۹۲ شد. به این ترتیب با حذف تعداد ۷ سؤال، آلفای محاسبه شده به میزان قابل توجهی رشد داشته که این مقدار بیانگر پایایی بالا و قابل قبول آزمون است. پس از تأیید پایایی، آزمون اصلی با تعداد ۱۱ سؤال روی نمونه اصلی انجام گردید.

جدول ۲. شاخصهای آماری سؤالات مرحله اول آزمون

گویه‌ها	ضریب دشواری	ضریب تمییز	گویه‌ها	ضریب دشواری	ضریب تمییز
۱	۶۳/۷۵	۰/۳۵	۲	۴۷	۰/۴۰
۳	۶۹/۲۰	۰/۴۷	۴	۵۹/۵۰	۰/۵۸
۵	۵۴	۰/۲۹	۶	۵۴	۰/۶۵
۷	۶۲/۵۰	۰/۴۶	۸	۳۳	۰/۶۶
۹	۲۷/۷۵	۰/۴۳	۱۰	۲۷/۷۵	۰/۴۵
۱۱	۱۲	۰/۴۳	۱۲	۲۲	۰/۴۵
۱۳	۶۹/۷۵	۰/۴۷	۱۴	۳۸/۷۵	۰/۴۲
۱۵	۷۳/۵۰	۰/۶	۱۶	۷۲	۰/۱۶
۱۷	۲۹	۰/۲۹	۱۸	۳۶	۰/۴

جدول ۳. جدول شاخصهای پراکندگی

تعداد سؤالات	انحراف معیار	واریانس	میانگین
۱۸	۶/۰۹۷	۳۷/۱۷	۳۳/۶۶
۱۱	۷/۲۷	۵۲/۸۹	۲۹/۲۰

سؤالات آزمون در دو قالب کلی طراحی شده بود که بخشی از سؤالات به مفاهیم کلیدی و بنیادی حد و اصطلاحات متداول و نمادها و نشانه‌گذاریها و علائم ریاضی مرتبط با آن مربوط است و بخش دیگر به تفسیر حد با استفاده از نمودارها و رسم شکل می‌پردازد. قبل از شروع آزمون، از دانش‌آموزان خواسته شد با دقت تمام در سؤالاتی که احتیاج به توضیح دارند، پاسخهای خود را توجیه کنند. باز–پاسخ بودن سؤالات که هر کدام به منظوری خاص طراحی شده است این امکان را فراهم می‌کند که بدفهمی‌ها نمایان و شناسایی شوند. همچنین برای بررسی میزان درک دانش‌آموزان از مفهوم حد نیز سؤالاتی مرتبط با رسم نمودار یا محاسبه حد از روی نمودار یا مفاهیم مرتبط با پیوستگی گنجانده شده است به طوری که ضعفهای محاسباتی به حداقل برسد و عوامل دیگر فرصت عرض اندام در قالب بدفهمی‌ها پیدا نکنند و یافته‌ها عینی‌تر شوند و تأثیر عوامل دیگر ناچیز گردد.

یافته‌های پژوهش

در این قسمت به تجزیه و تحلیل برخی از سؤالات آزمون می‌پردازیم.

سؤال ۱.کدام یک از موارد زیر در مورد مفهوم حد درست و کدام یک نادرست است؟ (برای جواب هر قسمت دلیل بیاورید.)

۱-۱. برای به دست آوردن حد یک تابع در یک نقطه، کافی است مقدار تابع در آن نقطه را حساب کنیم.

۱-۲. حد توصیف می‌کند که چگونه مقدار تابع تغییر می‌کند، هنگامی که مقدار x به سمت عدد خاصی حرکت می‌کند.

۱-۳. حد، عددی است که مقدار تابع به آن نزدیک‌تر می شود، ولی مساوی آن نمی‌شود.

۱-۴. حد تابع می تواند در نقطه خاصی وجود نداشته باشد.

هر یک از قسمتهای سؤال اول طوری طراحی شده است که با یکی از انواع بدفهمی‌های شناسایی شده در جدول ۱ مرتبط باشد. تجزیه و تحلیل سؤال یک در جدول ۴ ارائه شده است.

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

جدول ۴. تجزیه و تحلیل سؤال ۱

شماره سؤال	۱-۱		۱-۲		۱-۳		۱-۴	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
آنهایی که معتقد بودند این جمله درست است.	۲۷	٪۲۵	۷	٪۶	۲۰	٪۱۸	۲۲	٪۲۰
آنهایی که معتقد بودند این جمله درست نیست.	۶۸	٪۶۲	۹۰	٪۸۳	۸۴	٪۷۷	۸۳	٪۷۶
آنهایی که هیچ پاسخی به این قسمت ندادند.	۱۳	٪۱۲	۱۱	٪۱۰	۴	٪۳	۳	٪۲
جمع	۱۰۸	۱۰۰	۱۰۸	۱۰۰	۱۰۸	۱۰۰	۱۰۸	۱۰۰

به گفته وینر و دریفوس (۱۹۸۹، به نقل از جوادی، ۱۳۸۸)، تمام مفاهیم ریاضی به جز مفاهیم اولیه، دارای تعاریف رسمی هستند که بسیاری از آنها یک یا چند بار به دانش آموزان معرفی می‌شوند. درحالی که معمولاً دانش آموزان برای تشخیص اشیای ریاضی مورد بحث به عنوان یک مثال یا نامثال از آن مفهوم، عملاً تعریف را استفاده نمی‌کنند و در بسیاری از موارد، بر مبنای یک تصورِ مفهوم، تصمیم می‌گیرند. وینر و دریفوس(۱۹۸۹) همچنین اظهار می‌دارند که تصور مفهوم دانش آموز/ دانشجو از یک مفهوم، حاصل تجربهٔ وی با مثالها و نامثالهایی از آن مفهوم است. درنتیجه مجموعهٔ اشیای ریاضی که دانش آموز/ دانشجو به عنوان مثالهایی از مفهوم در نظر می‌گیرد، الزاماً همان مجموعه اشیا ریاضی که تعریف آن معین می‌کند، نیست(به نقل از جوادی، ۱۳۸۸). همانطور که در جدول نیز مشاهده می‌شود، پاسخهای نادرست در هر قسمت بیش از هر چیزی نشان‌دهنده این است که درک دانش آموزان از حد بیشتر از آنکه متأثر از تعریف رسمی حد باشد، برگرفته از تجربیات متفاوت آنها از حد است. مثلاً تجربه بررسی مقادیر مختلف یک تابع یا به‌دست آوردن مقدار حد به کمک برخی الگوریتمها یا توضیحاتی که برای مفهوم میل کردن به آنها داده شده است، بخشهایی از این تجربه‌ها هستند.

سوال ۲. به زبان ساده توضیح دهید حد تابع f وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند برابر عددی مانند l است به چه معناست؟

در این سؤال از دانش‌آموزان خواسته شده است تا فهم خودشان را از تعریف حد یک تابع بیان کنند. این سؤال با زبان محاوره‌ای و بدون بیان نمادها مطرح شده است. تجزیه و تحلیل سؤال ۲ در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. تجزیه و تحلیل سؤال ۲

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۳۹	٪۳۶
پاسخ نادرست	۶۹	٪۶۴
بدون پاسخ	۰	۰
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

این سؤال تنها سؤالی بود که همه دانش‌آموزان به آن پاسخ داده بودند ولی همان‌طور که مشاهده می‌شود فقط ٪۳۶ کل دانش‌آموزان درک درستی از مفهوم حد تابع را بیان کرده بودند. بقیه پاسخها نشان‌دهندهٔ عدم درک یا درک ناقص از مفهوم حد تابع است. برای نمونه برخی پاسخهای دانش‌آموزان در جدول شماره ۶ ارائه شده است.

جدول ۶. نمونه‌هایی از پاسخهای دانش‌آموزان به سؤال ۲

نمونه‌ها	پاسخها	نوع پاسخ
مریم	هرگاه x به a نزدیک می شود آنگاه L خیلی بزرگ می‌شود.	نادرست
فاطمه	وقتی x به عدد a نزدیک می شود یعنی این که L به صفر نزدیک می‌شود.	نادرست
محدثه	این تابع در $x=L$ پیوسته است.	نادرست
رضا	این بدان معناست که آیا به هم نزدیک می‌شوند یا از هم دور می‌شوند.	نادرست
سپهر	یعنی مقدار تابع آنقدر به L نزدیک می‌شود که می‌توان آن را با L برابر گرفت.	درست
مجید	یعنی تابع به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.	نادرست

سؤال ۳. شکل تابع $f(x)=\dfrac{x^2-9}{3x-9}$ **را رسم کرده و به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) دامنه تعریف تابع چیست؟ **ب) آیا این تابع در $x=3$ پیوسته است؟ (با ذکر دلیل)**

ج) آیا حد تابع در $x=3$ موجود است؟

د) اگر به مورد ج پاسخ مثبت داده‌اید حد تابع در $x=3$ چند است؟ **ه) مقدار تابع در $x=3$ چند است؟**

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این سؤال از دانش‌آموزان خواسته شده تا نمودار تابعی را رسم کنند که در یک نقطه تعریف نشده است و از روی آن در مورد وجود حد و پیوستگی و مقدار تابع در $x=3$ بحث کنند. تجزیه و تحلیل سؤال ۳ در جدول ۷ ارائه شده است.

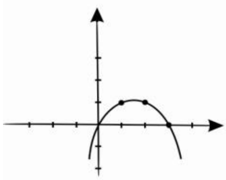
جدول ۷. تجزیه و تحلیل سؤال ۳

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۲۱	٪۲۰
پاسخ نادرست	۷۹	٪۷۳
بدون پاسخ	۸	٪۷
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

نکته قابل توجه در بررسی پاسخهای دانش‌آموزان به این سؤال، عملکرد ضعیف آنها در رسم نمودار تابع بود. حتی در میان برخی از دانش‌آموزان که با نقطه‌یابی به رسم تابع پرداخته بودند، شمار اندکی توانسته بودند شکلی تقریبی از تابع رسم کنند. این عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال مربوط به بازنمایی گرافیکی تابع است که در ایجاد بدفهمی‌ها در مفهوم حد بی‌تأثیر نیست. بررسی این سؤال نشان می‌دهد که عدم درک برخی از پیش نیازها، مانعی در درک مفهوم حد است. به طور نمونه درک ناقص از مفهوم تابع و ناتوانی از رسم نمودار تابع و فقدان مهارت کافی در کار با بازنماییهای متفاوت تابع، تاثیری بسزا در عدم درک مفهوم حد دارد. نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان در ادامه ارائه شده است:

نمونهٔ بازنویسی شده پاسخ نادرست دانش‌آموزان به سؤال ۳

۳ - شکل تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۹}{۳x-۹}$ را رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



$(۱ , \frac{۴}{۳})$ $\quad f(۱)=\frac{۱^{۲}-۹}{۳-۹}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$

$(۲ , \frac{۵}{۴})$ $\quad f(۲)=\frac{۲^{۲}-۹}{۳(۲)-۹}=\frac{۵}{۴}$

$(۳ , ۰)$ $\quad f(۳)=\frac{۳^{۲}-۹}{۳(۳)-۹}=\frac{۰}{۰}=۰$

الف) دامنه تعریف تابع چیست؟ R

ب) آیا این تابع در x=۳ پیوسته است؟ (با ذکر دلیل) پیوسته است، چون دارای حد چپ و راست است.

ج) آیا حد تابع در x=۳ موجود است؟ بله

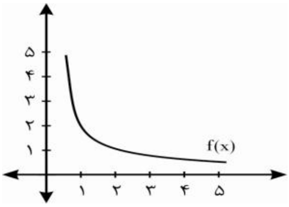
د) اگر به مورد (ج) پاسخ مثبت داده‌اید، حد تابع در x=۳ چند است؟ صفر است

ه) مقدار تابع در x=۳ چند است؟ صفر است

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

سؤال ۴. اگر شکل تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد

از $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ چه می‌فهمید؟



این سؤال به بررسی رفتار تابعی در بی‌نهایت می‌پردازد که نمودار آن در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته است. بیشترین بدفهمی‌های مشاهده شده در این سؤال را می‌توان به حد و بی‌نهایت نسبت داد. برخی از دانش آموزان بی نهایت را یک عدد می‌پندارند و حتی اعتقاد دارند که می‌توان مقدار تابع را به ازای آن به‌دست آورد. تجزیه و تحلیل این سؤال در جدول ۸ ارائه شده است.

جدول ۸. تجزیه و تحلیل سؤال ۴

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۱۴	٪۱۳
پاسخ نادرست	۸۵	٪۷۹
بدون پاسخ	۹	٪۸
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

برخی از پاسخهای دانش‌آموزان برای نمونه در جدول شماره ۹ ارائه شده است:

جدول ۹. نمونه‌هایی از پاسخهای دانش‌آموزان به سؤال ۴

نمونه‌ها	پاسخها	نوع پاسخ
مینا	هر گاه x خیلی بزرگ می‌شود، تابع کوچک‌تر می‌شود.	نادرست
احمدرضا	هر گاه x به بی‌نهایت نزدیک شود، f(x) نیز به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.	نادرست
زهرا	ما می‌توانیم $f(\infty)$ را پیدا کنیم ولی مقدار آن بستگی به فرمول تابع داده شده دارد. در این مورد خاص، زمانی که x افزایش می‌یابد تابع به صفر می‌رسد.	نادرست
رحیم	هر چقدر مقدار x زیادتر می‌شود، تابع به مقدار صفر نزدیک‌تر می‌شود.	درست

سؤال ۵. مثالی از یک تابع همراه با شکل آن ارائه کنید که حد آن تابع در نقطه $x=1$ مساوی -1 باشد.

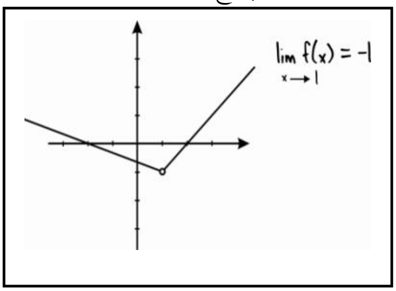
هدف از طرح این سؤال سنجش توانایی دانش‌آموزان نسبت به ارائه ضابطه و نمودار تابعی بوده که حد آن به صورت عبارت نمادین و به زبان ریاضی داده شده است. در حقیقت این سؤال به نوعی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان را می‌سنجد. تنوع پاسخها در این سؤال می‌تواند بدفهمی‌های بسیار را به معرض نمایش قرار دهد. تجزیه و تحلیل سؤال ۵ در جدول ۱۰ ارائه شده است.

جدول ۱۰. تجزیه و تحلیل سؤال ۵

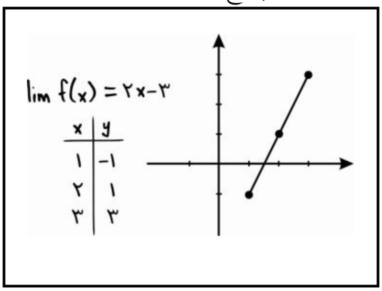
نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۱۷	٪۱۶
پاسخ نادرست	۶۶	٪۶۱
بدون پاسخ	۲۵	٪۲۳
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

همان‌طور که در جدول شماره ۱۰ مشاهده می‌شود، فقط ٪۱۶ دانش‌آموزان قادر بوده اند نموداری از تابعی ارائه کنند که شرایط لازم را در مسئله دارا باشد. بقیه پاسخهای نادرست ناشی از از انواع بدفهمی‌هایی بوده که در جدول ۱ به آنها اشاره شده است. دو نمونه از پاسخهای دانش‌آموزان به این سؤال در ادامه ارائه شده است. در نمونه پاسخ نادرست دانش آموز تنها به مقدار تابع توجه کرده است. چنین سؤالی یک مسئله باز پاسخ به حساب می آید و کمتر در کلاسهای درس و ارزشیابیها مورد استفاده قرار می‌گیرد. عملکرد دانش آموزان در این سؤال هم نشان می‌دهد که تصور مفهوم دانش آموزان تاثیری مستقیم بر درک دانش آموزان از مفهوم حد دارد.

نمونه پاسخ درست شماره ۱

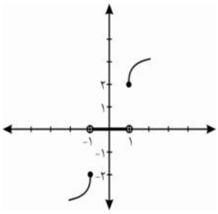


نمونه پاسخ نادرست شماره ۲



[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

سؤال۶. با توجه به نمودار $f(x)$ مقادیر خواسته شده را به‌دست‌آورید.



الف) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

ج) $\lim_{x\to 0} f(x)$ د) $f(\frac{1}{2})$

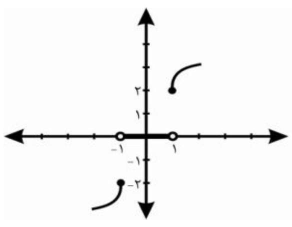
هدف از طرح این سؤال سنجش میزان توانایی دانش‌آموزان در تفسیر نمودار و یافتن حد چپ و راست و مقدار تابع از روی نمودار بوده است. پاسخهای نادرست در این قسمت را می‌توان به عدم درک صحیح نمودار توابع و علائم و نشانه‌های حد و حد چپ و راست و پیوستگی تابع نسبت داد. اکثر پاسخهای نادرست در این قسمت مربوط به یافتن $f(\frac{1}{2})$ از روی نمودار و حد تابع در نقطه صفر است. عملکرد دانش‌آموزان در یافتن حد چپ و راست در نقطهٔ ۱ بهتر از عملکرد آنها در یافتن حد تابع در نقطه صفر (۰) است که احتمالاً علت آن ناپیوسته بودن تابع در نقطه ۱ است. تجزیه و تحلیل سؤال ۶ در جدول ۱۱ ارائه شده است.

جدول ۱۱. تجزیه و تحلیل سؤال ۶

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۷۰	٪۶۵
پاسخ نادرست	۳۰	٪۲۸
بدون پاسخ	۸	٪۷
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

نمونه بازنویسی شده پاسخ دانش‌آموزان به سؤال ۶

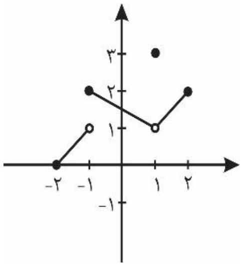
۶ - با توجه به نمودار f (x) مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = +۱$

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$ د) $f(\frac{۱}{۲}) =$ نمی‌دانم

سؤال ۷. برای تابع $f(x)$ کدام مورد نادرست است؟



الف) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ب) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

د) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$

در این سؤال نیز مانند سؤال قبل تفسیر حد از روی نمودار هدف مسئله بوده است. در بررسی پاسخهای مربوط به این سؤال در حدود ۲۲٪ دانش‌آموزان گزینه (الف) را به عنوان گزینه نادرست انتخاب کرده‌اند، احتمالاً دلیل این انتخاب بدفهمی مرتبط با عدم پیوستگی تابع در نقطه ۱ بوده است. ۱۷٪ دیگر از پاسخهای نادرست مربوط به انتخاب گزینهٔ (ب) است که نشان‌دهنده عملکرد ضعیف این گروه در تفسیر حد از روی نمودار است. ۳۵٪ دیگر پاسخها مربوط به انتخاب گزینه (ج) به عنوان گزینه نادرست بود که دلیل این انتخاب ناتوانی در تعیین حد و مقدار تابع در نقطه صفر (۰) است. در مجموع فقط ۲۳٪ از کل دانش‌آموزان با انتخاب گزینه (د) قادر بودند درکی درست از حد تابع را در این قسمت نمایان سازند، زیرا انتخاب گزینه درست مستلزم بررسی دقیق گزینه‌های دیگر است. تجزیه و تحلیل سؤال ۷ در جدول ۱۲ ارائه شده است.

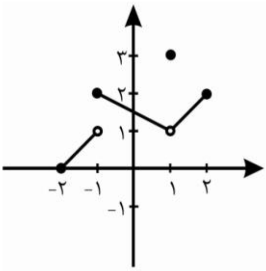
جدول ۱۲. تجزیه و تحلیل سؤال ۷

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۲۶	٪۲۳
پاسخ نادرست	۷۹	٪۷۴
بدون پاسخ	۳	٪۳
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

نمونه بازنویسی شده پاسخ دانش‌آموزان به سؤال ۷

۷ - برای تابع $f(x)$ کدام مورد نادرست است:؟

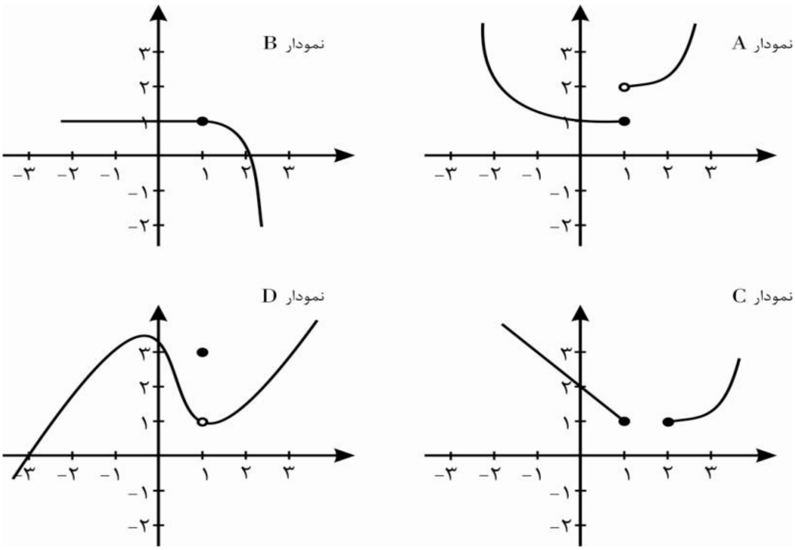


الف) √ $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱$ ب) $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} f(x)$ د) $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۲$

زیرا حد یک تابع سه می‌شود چون در نقطه ۱ عدد ۳ می‌شود.

۸. رابطه $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ در مورد کدام یک از توابع زیر صادق است؟



الف) **A** ب) **B** ج) **C** د) **A,B,D** ه) **A,B,C**

در این سؤال میزان درک دانش‌آموزان از پیوستگی تابع در یک نقطهٔ خاص مورد ارزیابی قرار گرفته است. انتخاب گزینه (ب) به عنوان پاسخ درست نشان‌دهندهٔ درک درست از مفهوم حد و پیوستگی تابع بوده ولی انتخاب هر یک از گزینه‌های دیگر انواع بدفهمی‌ها را در این زمینه آشکار می‌کند. تجزیه و تحلیل سؤال ۸ در جدول ۱۳ ارائه شده است.

جدول ۱۳. تجزیه و تحلیل سؤال ۸

نوع	فراوانی	درصد
پاسخ درست	۴۷	٪۴۴
پاسخ نادرست	۶۱	٪۵۶
بدون پاسخ	۰	٪۰
جمع	۱۰۸	٪۱۰۰

همان‌طور که جدول شماره ۱۳ نشان می‌دهد بیش از نیمی از دانش آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده اند. این در حالی است که انتظار می‌رفت به کمک نمودار تابع و استفاده از شهود بیشتر دانش آموزان پاسخ صحیح را شناسایی کنند. نکته دیگر در تحلیل این سؤال این است که ممکن است برخی از دانش آموزان در درک نمادها و علائم ریاضی با مشکل مواجه باشند و در نتیجه آنچه را سؤال از آنان خواسته است درک نکنند.

پاسخ به سؤالات تحقیق

۱. دانش‌آموزان سال سوم متوسطه چه درکی از مفهوم حد دارند؟

نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که درک مفهوم حد برای دانش آموزان دشوار است. با توجه به یافته‌های تحقیق دانش آموزان در پاسخ به سؤالات مفهومی آزمون، محاسبهٔ حد از روی نمودار، تعیین مقادیر تابع و تشخیص پیوستگی، عملکرد خوبی نداشته اند. بیشتر دانش آموزان در ارائه تعریفی برای حد در قالب جملات و زبان خود ناتوان بودند. این در حالی است که امروزه زمان بسیاری در مدارس صرف محاسبه حدهای نسبتاً پیچیده می‌شود و اتفاقاً این محاسبات را دانش آموزان به خوبی انجام می‌دهند. اکثر جملات مورد استفاده دانش‌آموزان برای تعریف حد کاملاً بی‌معنا و بدون ربط به مفهوم حد ارزیابی شده است. در پاسخ به سؤالاتی که محاسبهٔ حد از روی نمودار مدنظر بوده، باز هم درصد پاسخگویی بسیار پایین بوده است، به‌طوری‌که می‌توان نتیجه گرفت در تفسیر حد از روی نمودار، دانش‌آموزان درک خوبی از مفهوم حد ندارند که این مطلب هم برای حدهای بی‌نهایت و هم برای حد تابع در یک نقطه صدق می‌کند. همچنین زمانی

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

که از دانش‌آموزی خواسته شده تابعی مثال بزند که در یک نقطه خاص، مقدار خاصی داشته باشد، باز هم اکثر توابع ارائه شده گویای درک درستی از مفهوم حد نبوده است. به طور خلاصه می‌توان گفت که درک دانش آموزان از مفهوم حد متکی بر تصور مفهومی آنان است.

دانش‌آموزان در محاسبهٔ حدود توابع تمایل دارند به دانش رویه‌ای متکی باشند. آنها با تأکید بر دانش رویه‌ای و درک ابزاری به کمک قواعد و دستورهای حد، توانایی محاسبهٔ حدود توابع را به صورت جبری دارند ولی اکثر آنها درک مفهومی و عمیقی از حد ندارند. آنها در پاسخ به سؤالات مفهومی عملکردی مناسب از خود نشان ندادند و توانایی دستکاری و انعطاف‌پذیری میان بازنماییهای مختلف مفهوم حد توابع را ندارند. درکی که دانش‌آموزان از مفهوم حد دارند این است که حدها را همواره می‌توان با استفاده از دستورات و قواعد محاسباتی که برای حدهای مبهم، حدهای بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت وجود دارد محاسبه کرد. در صورتی که فهم عمیق حد پیش‌شرطی برای درک ریاضیات سطوح بالاتر چیزی دیگر است که اقلیت دانش‌آموزان به آن دست پیدا می‌کنند.

۲. بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد چیست؟

نتایج حاصل از این تحقیق نمایانگر درک ناقص دانش‌آموزان از مفهوم حد و پیوستگی است. تعبیر حد تابع به عنوان یک مرز، عدم تمایز میان مقدار تابع و حد آن، الزامی دانستن وجود مقدار تابع برای وجود حد آن در یک نقطه، غیر قابل دسترس دانستن حد یک تابع، درک نادرست از زبان و اصطلاحات و نمادهای به کار رفته برای تعریف حد، عدم درک مفهوم بی‌نهایت، ناتوانی در تفسیر حد تابع به کمک نمودار آن از مشکلات و بد فهمی‌های دانش آموزان در درک مفهوم حد است. برخی از مشکلات هم به درک مفاهیم دیگری مانند تابع برمی‌گردد. مثلاً عدم درک مفهوم تابع یا ناتوانی در ارتباط میان بازنماییهای مختلف یک تابع خود مانعی بر سر درک مفهوم حد است. توزیع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در جدول ۱۴ ارائه شده است.

جدول ۱۴. توزیع بدفهمی‌های دانش‌آموزان شرکت کننده در تحقیق

شماره	نوع بدفهمی	درصد فراوانی	تشریح آن
۱	حد و نمادها	٪۴۰	دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالهای ۲ و ۶ و ۷ و ۸ این بدفهمی را نمایان کردند.
۲	حد و حرکت	٪۲۲	دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال ۱ قسمت ۲ و سؤال ۲ این بدفهمی را نشان دادند.
۳	حدِ غیر قابل دسترس	٪۳۵	این بدفهمی در پاسخ به سؤال ۱ قسمت سوم و سؤال ۲ مشاهده شد.
۴	حد و جایگزینی	٪۵۰	این بدفهمی در پاسخ به سؤال ۱ قسمت اول و سؤالهای ۲ و ۶ و ۷ و ۸ مشاهده شد.
۵	حد و بی‌نهایت	٪۷۹	دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال ۴ این بدفهمی را نمایان کردند.
۶	حد و تفسیر نمودار	٪۵۴	دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات ۳ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ در تفسیر نمودار تابع و تعیین حد از روی آن این بدفهمی را نمایان کردند.

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

بحث و نتیجه‌گیری

هدف این تحقیق تشخیص، توصیف، تبیین و دسته‌بندی بدفهمی‌ها در زمینهٔ مفهوم حد تابع بوده است. با توجه به بررسی پاسخهای دانش‌آموزان، می‌توان نتیجه گرفت که باورها و بدفهمی‌های ایجاد شده در مورد این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان به چند دسته گوناگون تقسیم می‌شوند. مهم‌ترین باورها و بدفهمی‌های رایج در میان دانش آموزان درباره مفهوم حد از این قرارند: «حد غیر قابل دسترس است.»، «حد به سادگی با جایگزین کردن مقدار نقطه در تابع به‌دست می‌آید.»، «حد فرآیندی متحرک است.»، «حد یک مرز برای تابع است» و «حد و مقدار تابع یکی هستند». این بدفهمی‌ها در ذهن دانش‌آموزان مانعی برای درک مفهومی حد ایجاد کرده و سبب شده است که آنها درکی مناسب از مفهوم حد نداشته و محدود به روشهای معمولی و قاعده‌مند باشند.

ویلیامز (۱۹۹۱) نیز به این نوع از بدفهمی‌ها در تحقیق خود اشاره کرده و معتقد است که دانش‌آموزان همواره مقادیر تابع و حدها را یکسان می‌دانند یا به عقیده برخی از دانش‌آموزان تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد. همچنین به عقیده کوتریل و همکاران (۱۹۹۶)، دانش‌آموزان تصور می‌کنند که مفهوم حد غیر قابل دسترسی بوده، در حال تغییر است و با مفهوم حرکت گره خورده است. این نوع بدفهمی‌ها در تحقیق جوردان (۲۰۰۵) نیز مشاهده شده و به ثبت رسیده است.

در آموزش و یادگیری حد، دانش‌آموزان از قبل دارای ایده‌های شهودی و تصاویر ذهنی هستند که از تجربه‌های روزانه به‌دست آورده‌اند. این ایده‌های شهودی و معانی محاوره‌ای که کارنو (۱۹۹۱) از آنها به عنوان مدلهای ذهنی[1] یاد می‌کند، قبل از هر آموزش رسمی در دانش‌آموزان ایجاد می‌شود. در زمان تدریس مفهوم حد، این ایده‌ها به‌خلاف آنچه تصور می‌شود، ناپدید نمی‌شوند، بلکه با دانش تازه به‌دست آمده مخلوط می‌شوند و تغییر می‌کنند یا اصلاح می‌شوند و به شکل مفاهیم شخصی دانش‌آموزان تثبیت می‌شوند.

برخی بدفهمی‌هایی که در زمینه حد در دانش‌آموزان بروز می‌کند، مربوط به درک ناقص آنها از مفهوم تابع بوده است؛ اگر دانش‌آموزی در تبدیل انواع بازنماییهای گوناگون یک تابع توانا باشد، حتماً می‌تواند در محاسبه حد از روی نمودار موفق عمل کند. همچنین دانش‌آموزی که حد را غیرقابل دسترسی تصور می‌کند، دلیل این بدفهمی را می‌توان در زبان مورد استفاده در کتاب درسی

1. Mental models

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

برای توصیف حد با بیان عباراتی همچون «نزدیک می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد.» و مانند آن جستجو کرد. دانش‌آموزی که تصور حرکت از حد دارد، در ذهن خود می‌پندارد که تابع f(x) در حال نزدیک شدن به مقدار حد خود است و این نزدیک شدن همواره ادامه دارد. یا در زمانی که دانش‌آموز عقیده دارد تابع باید در نقطه‌ای تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد و اگر تابعی در نقطه‌ای ناپیوسته باشد در آن نقطه حد ندارد، به دلیل نداشتن طرحواره ای مناسب از تعریف حد و پیوستگی است.

از عوامل مهم به وجود آمدن انواع بدفهمی‌ها در میان دانش‌آموزان نحوهٔ آموزش این مفهوم است. تأکید آموزش بر دانش رویه‌ای به جای دانش مفهومی و همچنین شیوه‌های تدریس و نحوهٔ بیان مفهوم و عدم انطباق روش تدریس با روشهای نوین آموزشی و عدم آگاهی از بدفهمی‌های احتمالی در حین تدریس و عدم توجه به سطح یادگیری پیشین دانش‌آموزان از عواملی هستند که آموزش مفهوم حد را دچار مشکل می‌کنند. وینر(۱۹۸۳) ادعا می‌کند که (۱) برای دست ورزی با مفهوم افراد نیاز به یک تصور مفهوم دارند و نه یک تعریف مفهوم و(۲) تعاریف مفهومی(هنگامی که مفهوم به وسیله یک تعریف معرفی می‌شود) غیر فعال باقی می‌مانند یا حتی ممکن است فراموش شوند. در فرآیند تفکر تقریباً همیشه تصور مفهوم است که فرا خوانده می‌شود. بنابراین روش مناسب برای آموزش یک مفهوم همان‌گونه که تال(۱۹۸۸) و وینر(۱۹۸۳) هم بیان کرده اند آن است که ابتدا فرصتهای متعدد برای به‌دست آوردن تجربیات غنی و ساختن تصوراتی منسجم از یک مفهوم برای دانش آموزان فراهم شود، سپس برای آن مفهوم تعریف رسمی ارائه شود. از این منظر کتاب درسی و دیدگاههای آموزشی معلم نقشی اساسی و تعیین کننده در قابل درک ساختن مفهوم برای دانش آموزان دارند.

پرداختن به تحقیقاتی در زمینه تدریس و یادگیری هر مفهوم در ریاضی، مانند مفهوم حد می‌تواند منجر به ارائه راهکارهایی برای تدریس شود و استفاده از این راهکارها به درک بهتر و عمیق‌تر دانش‌آموزان و کاهش بدفهمی‌های آنها بینجامد. بررسی فرآیندهای شناختی که در فراگیری مفهوم حد نقش دارند، مطالعه نقش بدفهمی‌ها بر یادگیری حد و ارائه شیوه‌هایی برای اصلاح آنها و بررسی و ارائه راهکارهایی برای تدریس و آموزش حد می‌توانند موضوعاتی مناسب برای تحقیقات بعدی باشند.

[DOR: 20.1001.1.10174133.1395.32.4.3.5]

منابع

جوادی، مهدی. (۱۳۸۸). «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» برای مفهوم «تابع». *رشد آموزش ریاضی*، ۲۷ (۹۸)، ۲۳-۲۷.

ریحانی، ابراهیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز و نظری، کامل. (۱۳۹۲). بررسی تأثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأکید بر فعالیت‌های مبتنی بر تجسم. *فصلنامه تازه‌های علوم شناختی*، ۱۵ (۱)، ۲۷-۴۲.

سلطانی، محمد. (۱۳۹۱). *بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم تجربی و ریاضی در مورد مفهوم حد*. پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی. تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

گویا، زهرا و حسام، عبداله. (۱۳۸۴). نقش طرحواره‌ها در شکل گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان. *رشد آموزش ریاضی*، ۲۲ (۸۲)، ۴-۱۵.

محتشم، زهرا. (۱۳۹۳). مدل مفهومی تصور مفهوم و اهمیت آن در آموزش ریاضی. *رشد آموزش ریاضی*، ۳۱ (۹۳)، ۲۱-۳۰.

Allen, D.G. (2007). *Student thinking: Lesson 1. Misconception in mathematics.* Department of Mathematics, Texas A & M University. Retrieved from http://www.math.tamu.edu/~snite/MisMath.pdf

Cornu, B. (1991). Limits. In A. J. Bishop (Managing Ed.) & D. Tall (Vol. Ed.), *Mathematics Education Library: Vol. 11. Advanced mathematical thinking* (pp. 53-166). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Davis, R., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, *5*(3), 281-303.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the didactic contract. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 439–453.

Jordaan, T. (2005). *Misconception of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. Unpublished master dissertation of education, University of South Africa.

Juter, K. (2006). *Limits of functions: University students' concept development*. Unpublished doctoral dissertation, Lulea University of Technology, Sweden.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Szydlik, E.J. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258-276.

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. D. Lange & M. Doorman (Eds.), *Senior secondary mathematics education* (pp. 37-41). Utrecht: OW & OC.

Tall, D. O., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44–49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 239-305.

Wiliams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.